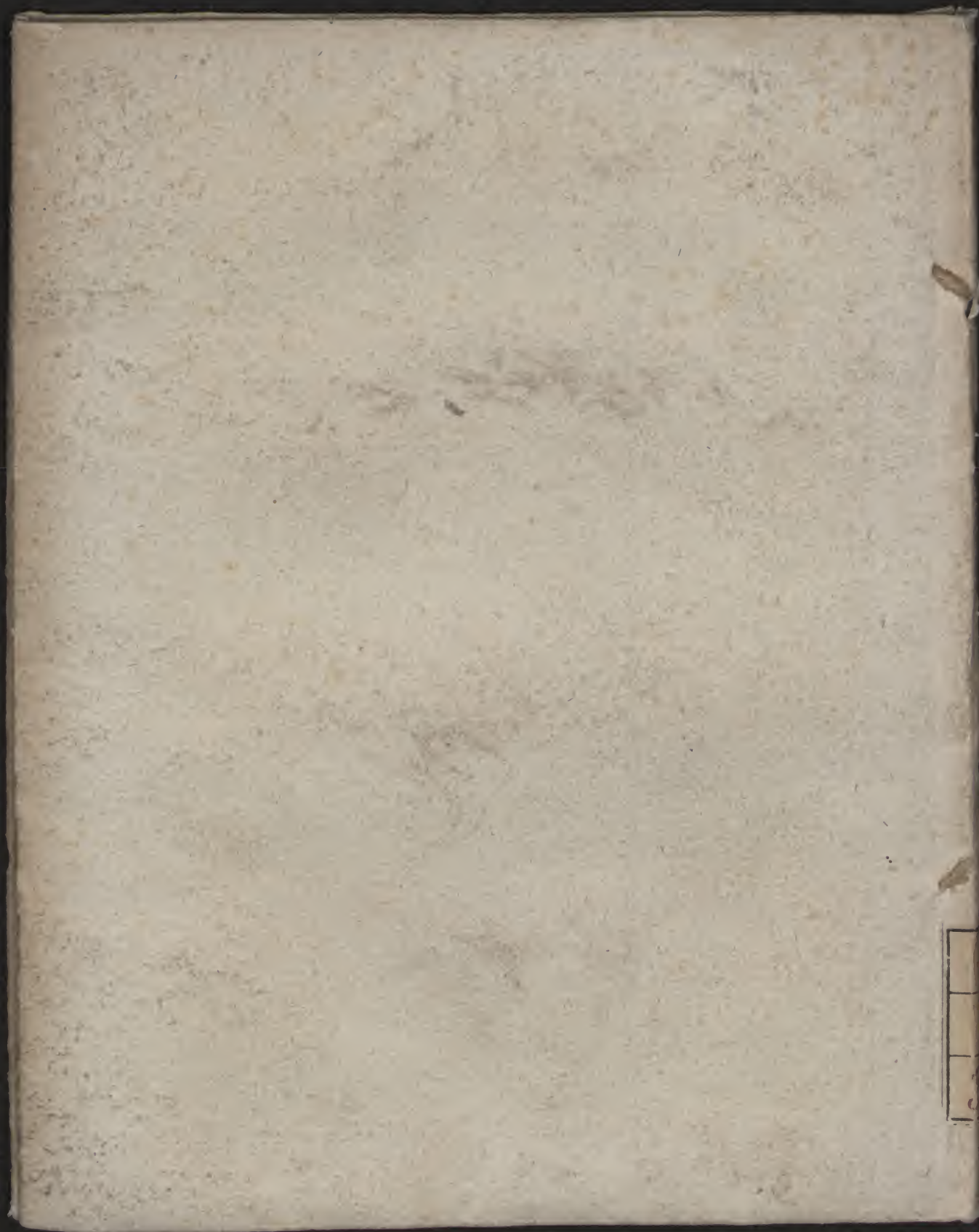
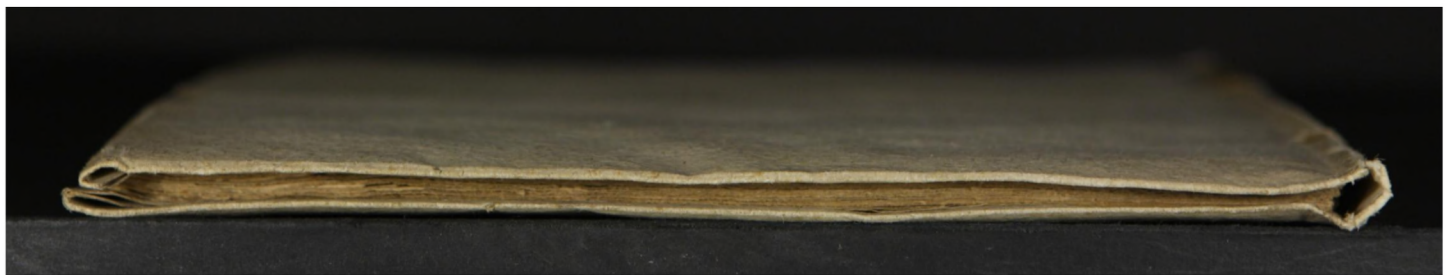




Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.329

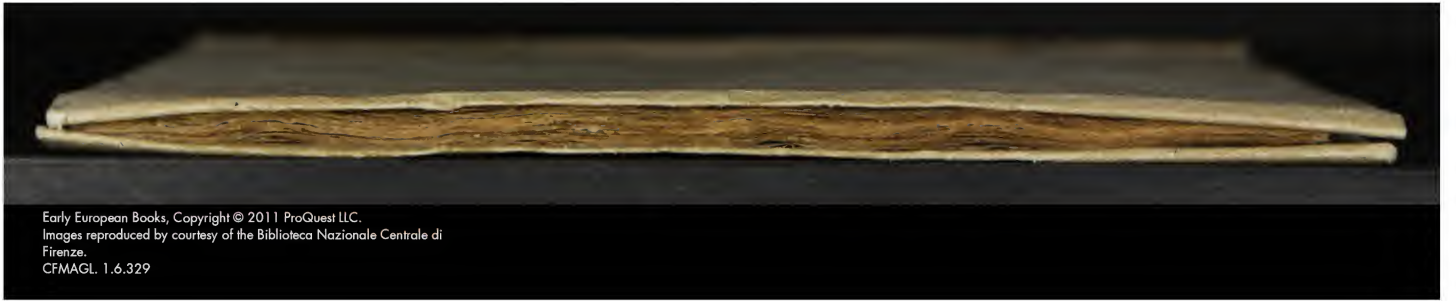




Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.329



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.329



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.329

1 K. 6

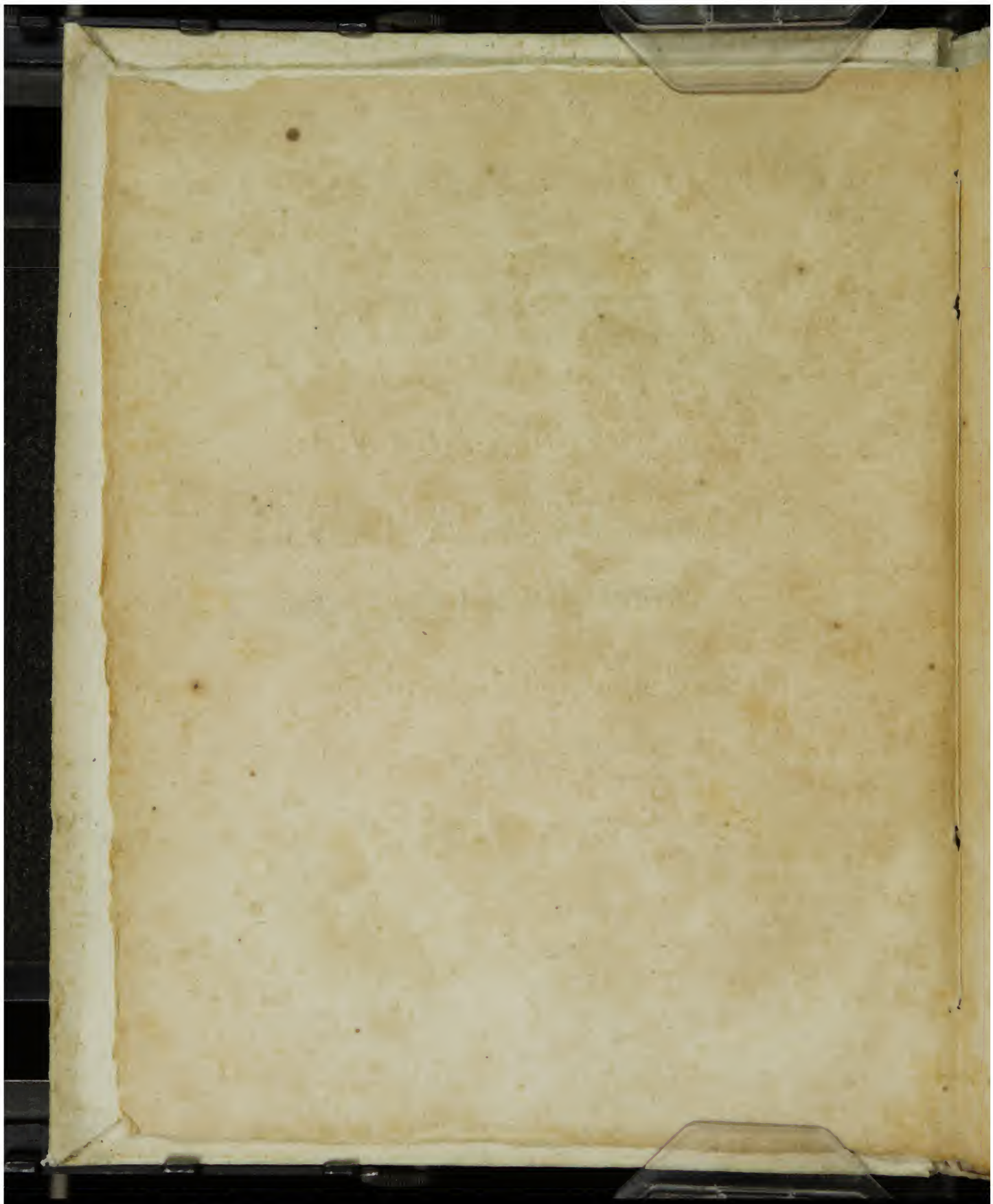
1. 6. 329

XI
MERC.

CANDIDIS atque *INGENUIS*
MATHEMATUM
CULTORIBUS

Opellam hanc lubens meritóque

DEDICAT
AUTHOR.



LOGARITHMOT-TECHNIA:
SIVE
Methodus construendi
LOGARITHMOS
Nova, accurata, & facilis;
SCRIPTO

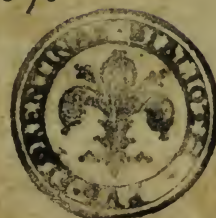
Antehac Communicata, Anno Sc. 1667.

Nonis *Augusti*: Cui nunc accedit.

Vera Quadratura Hyperbolæ,

&

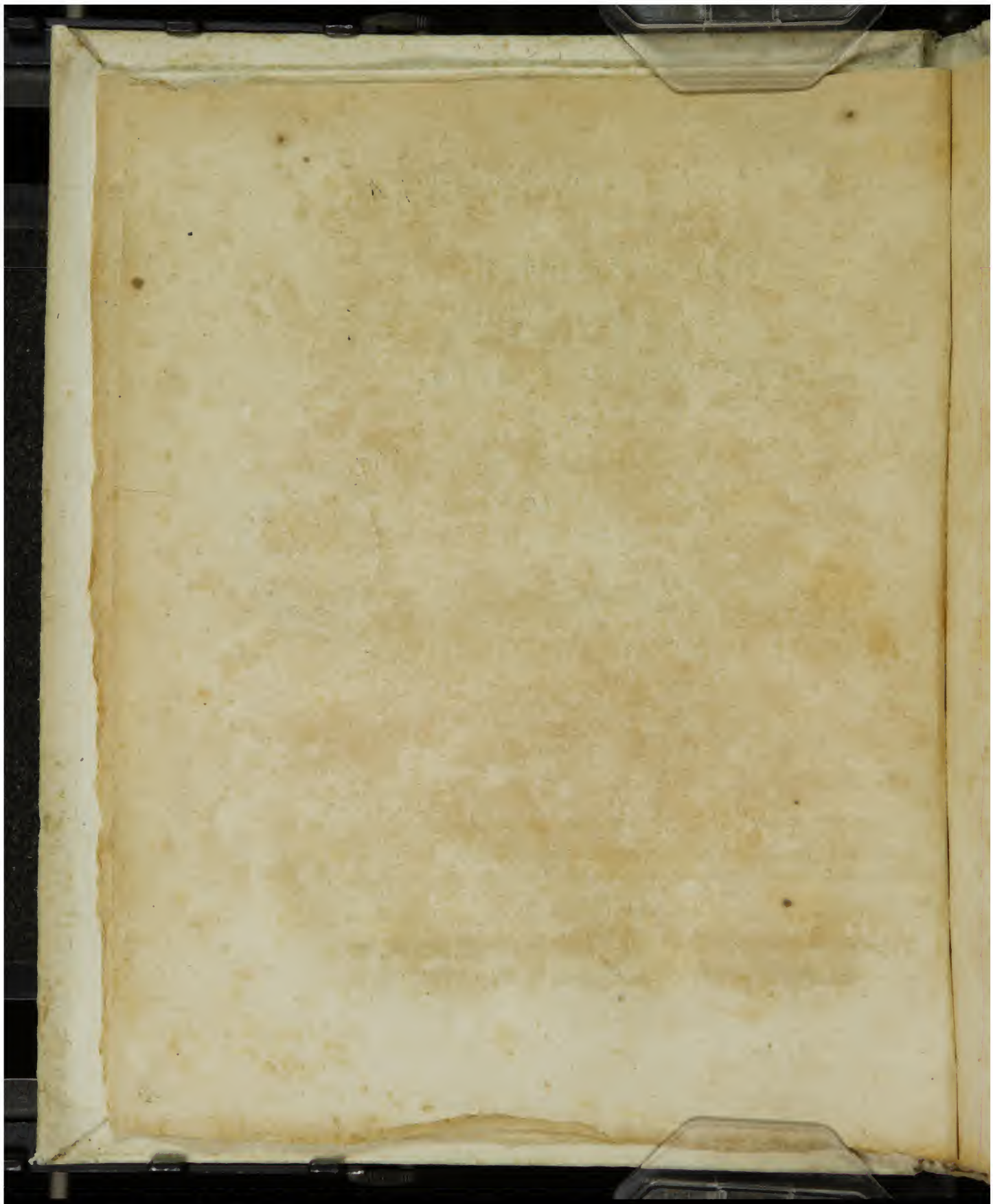
Inventio *Summa* Logarithmorum.



AUCTORE **NICOLAO MERCATORE**
Hollato, è Societate Regia.

HUIC ETIAM JUNGITUR
MICHAELIS ANGELI RICCI Exercitatio
Geometrica de Maximis & Minimis; hinc ob Argumenti
præstantiam & Exemplarium raritatem recusa.

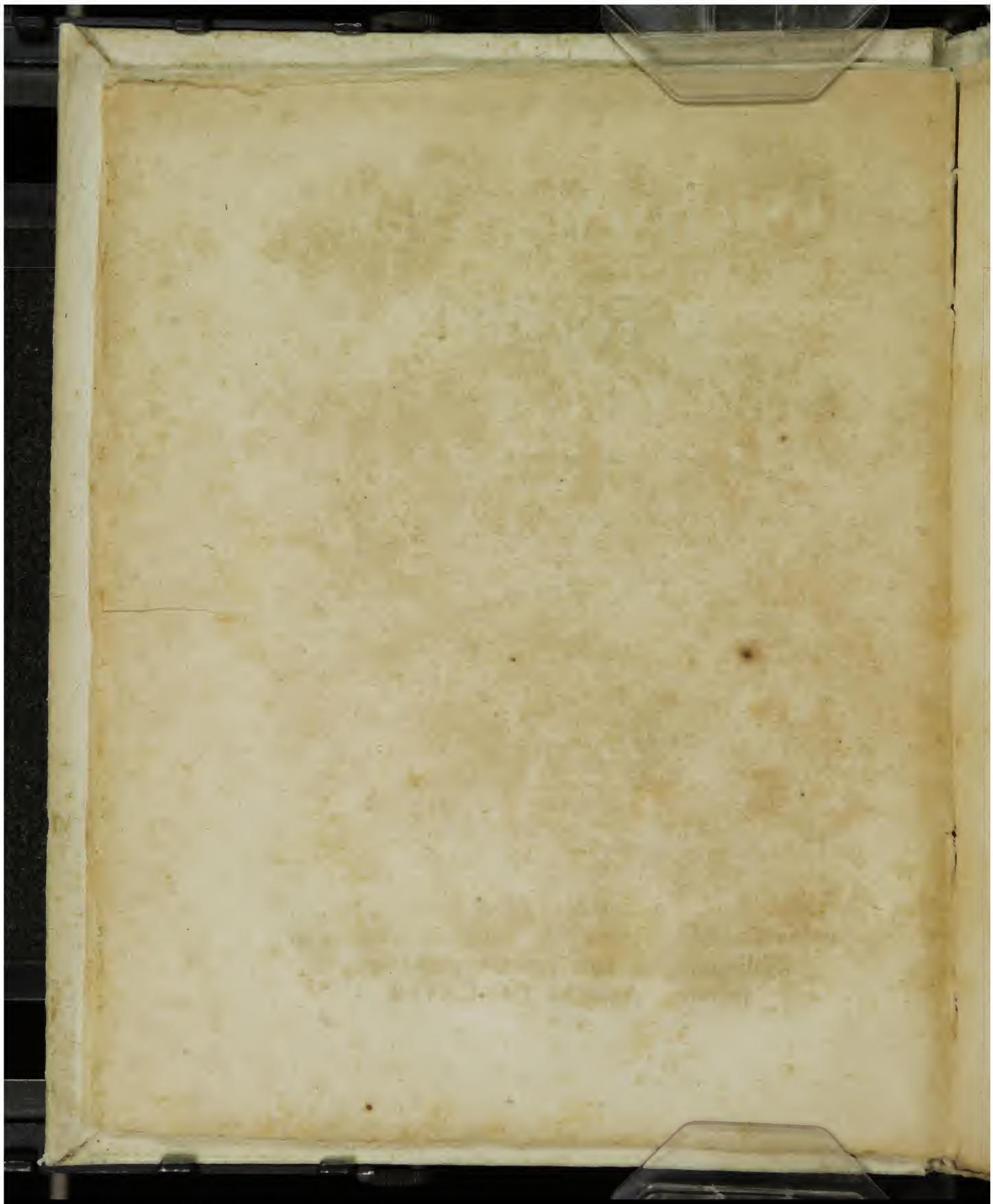
LONDINI,
Typis *Guilielmi Godbid*, & Impensis *Mosis Pitt* Bibliopolæ, in
vico vulgò vocato *Little Britain*. Anno M. DC. LXVIII.



Michaelis Angeli
Ricci
EXERCITATIO
GEOMETRICA
De MAXIMIS & MINIMIS.



LONDINI,
Typis Guilielmi Godbid, & Impensis Mosis Pitt
Bibliopolæ, in vico vulgo vocato Little
Britain. Anno M. CC. LXVIII.





LOGARITHMOTECNIA.



LOGARITHMUS composito vocabulo dicitur à ratione & numero, quasi rationum numerus, id quod planè cum re consentit. Est enim Logarithmus nihil aliud, quàm numerus ratiuncularum, contentarum in ratione, quam absolutus quisque ad unitatem obtinet. In qua definitione rationes accipimus, tanquam magnitudines partibus constantes homogeneis toti, strictiori aliquantò notione, quàm vulgo solet. Quamvis enim raturum sit, rationem omnem ex comparatione quantitatum homogenearum oriri: certè nec quævis comparatio producit rationem; nec quarumvis quantitatum, homogenearum licèt, habitudo est ratio quanta, seu partibus constans. Nam æqualitatis, quæ dicitur, ratio, est illa quidem quantitatum homogenearum, atque æqualium, habitudo mutua, unde nec rationis appellatione privandam autumem, cui definitio *Euclidæa* competit non minùs ac aliis rationibus, quas inæqualitatis vocant: sed nihil obstat, quo minus generalem istam rationis notionem porro dividamus ita, ut quantitatem habere putentur solæ rationes, ex inæqualium habitudine ortæ, at æqualitatis ratio in indivisibili consistat, habeatque se in rationibus, quemadmodum punctum in magnitudinibus, aut nullitas in numeris, quæ singula quantitate ac partibus carent. Componas enim sexcentas rationes æqualitatis, non augetur nec minuitur ratio, sed eadem manet æqualitas: secùs atque in rationibus inæqualitatis, quæ additæ vel detractæ invicem, faciunt rationem majorem vel minorem. Quantum autem est, quod additis vel demtis partibus homogeneis augetur minuiturve. Sed nec quævis comparatio quantitatum homogenearum rationem producit. Veluti cùm numerum dividimus per numerum; comparantur utique quantitates homogeneæ, spectando quoties altera contineatur in altera; sed quod inde oritur latus, nec ratio est ipsorum numerorum, nec sanè quantitatem exprimit rationis, quæ utrisque intercedit. Alioquin diviso numero quovis per æqualem, quæ inde oritur unitas, exprimeret quantitatem rationis æqualium, quam tamen quantitate carere supra adstruximus. Quinimò, datis pluribus rationibus, v. gr. 4 ad 2, & 9 ad 3, si diviso utriusque antecedente per

B

suum

suum consequentem, exhiberent orti 2 & 3 veram quantitatem istarum rationum; oporteret, ut ex his ortis compositus numerus, nimirum 5, exhiberet quoque veram quantitatem rationis compositæ. Atqui ratio composita est 36 ad 6, cujus quantitatem jam exprimeret ortus 6, diversus sanè ab isto 5. Obtinuit tamen usus, ut rationes denominentur à latere orto; sic ratio 4 ad 2 dicitur dupla, & 9 ad 3 tripla: verum hæc nomina arbitrio hominum imposita; retineri quidem possunt, veritati autem derogare nullo modo debent. Quamquam nec utilitate caret iste modus denominandi rationes; siquidem arguit, rationes esse majores, quarum denominator est major, & contra: eodem modo sinus majores congruunt majoribus arcibus, quorum tamen veram quantitatem exprimere nemini videntur. Cœterum, ut linea est dupla lineæ, quam bis continet; ita, propriè loquendo, dupla foret ratio alterius rationis, quam bis continet; sed pro eo duplicatam dicere maluerunt Scriptores, quorum arbitrio synonyma alioquin vocabula *dupli* & *duplicati*, res planè diversas significare intelliguntur. Verùm id quod est multo maximum; nimirum omnium quantitatum mensuram esse quantitatem homogeneam, & in divisione genuina fieri applicationem mensuræ homogeneæ ad quantitatem mensurandam, ortum vero ex tali applicatione, nihil aliud esse, quàm numerum Arithmeticum, exprimentem, quoties mensura continetur in mensurato; hoc scilicet est, quod omnem dubitationem excludit. Ita falluntur profectò, qui applicatâ lineâ rectâ illatabili ad aream datam, putant inveniri latitudinem rectanguli; quasi non potius secundum veras divisionis leges applicaretur rectangulum æquè longum divisori, & æquè latum unitati assumptæ, ad aream extensam quoque ad longitudinem divisoris; & quasi non ortus ex ista applicatione, numerus esset Arithmeticus, exprimens, quoties rectangulum mensurans contineatur in mensurato, vel (cum per 1. VI eadem sit ratio) quoties latitudo rectanguli applicati contineatur in latitudine rectanguli mensurati; quò scilicet divisio verè opponatur multiplicationi, quæ resolvat hujus productum in sua elementa. Quemadmodum enim omnis multiplicator est numerus Arithmeticus (ut habet *Stevinus* in *Arithmetica Practica*;) ita omnis ortus à divisione est similiter numerus Arithmeticus. Quæ quidem omnia facillimè præsentî negotio aptantur. Nam multiplicare rationem nihil est aliud, quàm replicare aliquam rationem toties, quot sunt unitates in numero aliquo Arithmetico, qui dicitur factor. Et dividere rationem, est applicare rationem aliquam ad aliam rationem, ut inveniatur numerus Arithmeticus, exprimens, quoties mensurans ratio contineatur in mensurata. Id si hic fieret, nihil dubium, quin vera patefieret rationis quantitas. At enimverò, cum applicatur terminus alicujus rationis ad alterum, num putamus rationem applicari

plicari ad rationem? quo pacto igitur ortus ex tali applicatione potest exprimere quantitatem datæ rationis? Verum est quidem, quòd ortus ex applicatione termini ad terminum, rationem habet ad unitatem eandem, quam dividuus ad divisorem; sed hoc modo eadem prodit ratio, quæ ante divisionem fuerat, aliis tantum terminis expressa; nec proinde quantitas rationis datæ invenitur in mensura aliqua prius nota, quemadmodum in aliis magnitudinibus divisio asolet, & instituti nostri ratio postulat: Siquidem tum demum quantitatem rationum exactè determinâsse videbimur, cum eas omnes in una aliqua ac eâdem communi mensurâ æstimare noverimus; id quod Logarithmorum ope præstari, definitione modò traditâ innuere volui. Ex qua porro intelligitur, cum singuli Logarithmi numerent particulas rationum inde ab unitate ad singulos ordine absolutos procedendo coacervatarum; fieri non posse, quin æqualibus Logarithmorum differentiis (id est, æqualibus particularum incrementis) congruant quoque æquales rationes absolutis intercedentes (cum integra ex æquali numero particularum æqualium conflata, inter se sint æqualia;) adeoque Logarithmos esse in proportionem Arithmetica, cum eorum absoluti sunt in Geometrica; idcirco posse operationem Regulæ proportionum in compendium redigi, substitutâ additione & subtractione loco multiplicationis & divisionis: Denique rationis cujusque bipartitionem, tripartitionem, &c. quæ alioquin requireret extractionem radicis quadratæ, cubicæ, &c. consistere in bipartitione, tripartitione, &c. differentiæ Logarithmorum datis terminis congruentium (hoc est, ratiuncularum in ratione data comprehensarum.) Qui usus cum sit eximius, patet postremò, quo pacto tam utiles numeri artificiales, seu Logarithmi concinnari possint; nimirum investigando, quot ratiunculæ, assumptæ magnitudinis, contineantur in ratione cujusque absoluti ad unitatem. Sic enim unitatis Logarithmus evadit 0, cum unitatis ad unitatem ratio sit æqualitatis, quam quantitate carere supra adserui. Ita nimirum fiet, ut cum inter multiplicandum vel dividendum unitas nihil mutet; hujus Logarithmus 0 (dum additio & subtractio substituuntur multiplicationi & divisioni) nihil quoque additione vel detractioe sui mutet. Numerus autem ratiuncularum in ratione decupla contentarum commodissimè assumitur 1,0000000 (hoc est, una decupla ratio in numerum partium decimalium rotundum distributa.) Ita enim fiet, dum inter unitatem & 10 intercedit una ratio decupla, & porro inter 10 & 100 altera, inter 100 & 1000 tertia, & deinceps, ut in centupla quidem ratione contineantur ratiunculæ 2,0000000 (hoc est, duæ decuplæ rationes in numerum partium rotundum distributæ) in millicupla verò ratione contineantur 3,0000000 (hoc est, tres rationes decuplæ in numerum par-

tium rotundum distributæ;) & deinceps. Unde primum hoc commodi consequimur, ut absolutis, iisdem characteribus expressis, iidem competant Logarithmi; veluti si absoluto 2 competat Logarithmus 0,3010299; etiam absolutis 20, 200, 2000 competant Logarithmi 1,3010299; 2,3010299; 3,3010299. Etenim si rationes 2 ad 1, 20 ad 1, 200 ad 1, & deinceps, intelligantur partitæ, illa quidem in rationes 2 ad 1 & 1 ad 1; ista in 20 ad 10, & 10 ad 1; hæc in 200 ad 100, & 100 ad 1; apparet, quod excessus 2 ad 1, quo illa superat rationem 1 ad 1 æqualis sit excessui 20 ad 10, quo ista superat rationem 10 ad 1, idemque æqualis excessui 200 ad 100, quo hæc superat rationem 100 ad 1. Ergo si ratio 2 ad 1 præter æqualitatis rationem (quam innuit characteristica 0) contineat ratiunculas 3010299, qualium ipsa decupla continet 1,0000000; certè ratio 10 ad 1 præter unam decuplam (quam innuit characteristica 1) continebit eundem numerum ratiuncularum excurrentium 3010299; & ratio 200 ad 1 præter duas decuplas (quas innuit characteristica 2) continebit similiter eundem numerum ratiuncularum excurrentium 3010299. Unde porro & hoc consequimur, ut ex inspecta characteristica, uniuscujusque absoluti valorem æstimare queamus. Nam cum in decupla contineantur 1,0000000 ratiunculæ numero rotundo, & in centupla 2,0000000 ratiunculæ numero itidem rotundo; oportet, ut quæcunque sunt inter decuplam & centuplam contineant plus quam unam decuplam, minus autem quam duas; quamobrem characteristica omnium absolutorum, qui sunt inter 10 & 100, ipsiusque adeo denarii (hoc est, omnium numerorum, qui scribuntur duobus characteribus) erit 1; & sic deinceps.

His ita ordinatis, proximum est, ut ostendamus, quomodo inveniatur mensura rationis, quam quisque absolutus obtinet ad unitatem, in partibus, qualium decupla continet 1,0000000 (hoc est, quomodo cujusque absoluti Logarithmus investigandus sit.) Verbi gratiâ: Scire velim, ratio 100[5 ad 1 quot contineat ratiunculas, qualium decupla continet 1,0000000. Dispesco igitur rationem datam 100[5 ad 1 in suas partes, nimirum 100[5 ad 100, 100 ad 10, & 10 ad 1, quarum posteriores duæ constituunt duas decuplas (unde patet Characteristicam fore 2;) itaque restat, ut investigemus, quota pars sit reliqua ista ratio 100[5 ad 100 ipsius decuplæ. Quod si igitur termini 100[5 & 100 ducantur uterque in sese, producti exhibebunt rationem duplicatam rationis 100[5 ad 100, cujus (duplicatæ sc. rationis) termini rursus in se ducti procreabunt duplicatam duplicatæ, id est, quadruplicatam rationis 100[5 ad 100: atque ita continuatâ multiplicatione terminorum, donec is, qui gignitur ex ductu continuo termini 100[5 in seipsum, evadat decuplus ejus, quem ductus con-

tinuus

tinuus termini 100 in seipsum producit; denominator potestatis postremo genitæ ostendet, quot integris vicibus ratio 100[5 ad 100 contineatur in decupla. Et cum alter terminorum sit 100, cujus potestares omnes constant unitate & certo numero cyphrarum; omnis labor reliquus occupabitur circa elevandum alterum terminum 100[5 ad eam potestatem, quæ prioris termini (nimirum 100rij) æquæ altam potestatem excedat decuplo; cujus operationis compendium exemplo, quam verbis docere præstat.

100[5000 (1)	1893406 (128)	sed in proximè præcedentem, hoc modo:
500r (1)	6043981 (128)	9340130 (448)
1005000	3584985 (256)	8603801 (16)
5025	5894853 (256)	
1010015 (2)	12852116 (512)	10115994 (464)
520040r (2)		Ubi rursus ninium colligitur, ergo eandem adhuc 448vam duco, non in 10tam, ut modo, sed in proximè præcedentem, nimirum 8vam, hoc modo:
1010025	Hæc potestas plusquam decuplo excedit potestatem æquæ altam 100rij; ergo resumo 256tam, eamq; duco, non in sese, ut modo, sed in proximè præcedentem, nimirum 128vam, hoc modo:	9340130 (448)
10100		6070401 (8)
20		9720329 (456)
5		0510201 (4)
1020150 (4)	3584985 (256)	9916193 (460)
0510201 (4)	6043981 (128)	5200101 (2)
1020150	6787831 (384)	
20403.	1106731 (64)	10015603 (462)
102	9340130 (448)	Quæ potestas rursus excedit limitem; quare eandem 460tam duco, non in 2dam, sed in 1mam, hoc modo:
51	5303711 (32)	9916193 (460)
1040706 (8)	10956299 (480)	5001 (1)
6070401 (8)		9965774 (461)
1083068 (16)		Cum
8603801 (16)		
1173035 (32)		
5303711 (32)		
1376011 (64)		
1106731 (64)		
1893406 (128)		

Cum igitur 462da potestas termini 100[5 excedat æquè altam 100rij plus quam decuplo, at 461ma ejusdem termini 100[5 excedat æquè altam 100rij minus quam decuplo : ajo, rationem 100[5 ad 100 contineri in decupla plus quam 461 vicibus, minus autem quam 462 bus.

Coeterum

Cum potestas $\left\{ \begin{matrix} 460 \\ 461 \\ 462 \end{matrix} \right\}$ fit $\left\{ \begin{matrix} 9916193 \\ 9965774 \\ 10015603 \end{matrix} \right\}$ & differentiæ $\left\{ \begin{matrix} 49581 \\ 49829 \end{matrix} \right\}$ propemodum æquales ;

Itaque partem proportionalem, quâ potestas justa, nimirum 10000000 excedit proximè minorem 9965774, per Regulam auream faciliè ac tuto reperire datur, sumendo nimirum,

justæ	10000000
& proximè minoris	<u>9965774</u>

differentiam 34226, & dicendo :

Ut differentia inter proximè minorem & majorem
(nimirum 49829)

Ad differentiam inter proximè minorem & justam
(putà 34226 ;)

Ita 10000, ad 6868 ; quæ sunt partes decimales unius vicis, adeò ut ratio 100[5 ad 100 contineatur in decupla 461[6868 vicibus. Porro, Si decupla (sive ratio 100[5 ad 100 sumta 461[6868 vicibus) continet ratiunculas 1,0000000 ; quot ejusmodi ratiunculas continebit ratio 100[5 ad 100 semel sumta ? Prodeunt 21659[7. ratiunculae, quæ sunt exacta mensura rationis 100[5 ad 100, quibus si addas rationes 100 ad 10, & 10 ad 1, hoc est bis decuplam, constantem ratiunculis 2,0000000, fit integra mensura rationis 100[5 ad 1 (sive Logarithmus absoluti 100[5) hic scilicet 2,0021659[7.

Pari modo invenietur Logarithmus absoluti 99[5, vel ratio absoluti 99[5 ad 1, si ex ratione 100 ad 1 (quæ æquipollat bis decuplæ) auferas rationem 100 ad 99[5, hoc est, ex ratiunculis 2,0000000 auferas numerum similium ratiuncularum in ratione 100 ad 99[5 contentarum. Quærat igitur primum, quoties ratio 100 ad 99[5 contineatur in decupla. Ubi rursus alter terminorum cum sit 100, operationis hanc indiget; alter verò 99[5 continuo ductu in seipsum elevandus est ad eam potestatem, quæ decuplo minor sit potestate 100rij æquè altâ. En operationem :

995000 (1.)	8518016 (32)	100rij æquè altâ, ergo
599 (1)	6108158 (32)	refume
8955000	7255660 (64)	1058613(448)
895500	665527 (64)	139229 (16)
49750	5264459 (128)	977026(464)
9900250 (2)	9544625 (128)	Quæ etiam plusquam
520099 (2)	2771452 (256)	decuplo minor est pote-
8910225	2541772 (256)	state 100rij æquè alta;
891023	554290 (512)	ergo refume
198	Hæc potestas plus-	1058613(448)
49	quam decuplo minor est	396069 (8)
9801495 (4)	potestate 100rij æquè	1017002(456)
5941089 (4)	altâ; ergo refume	5941089 (4)
8821345	2771452 (256)	996814(460)
784120	9544625 (128)	Hæc quoque plusquam
980	1459018 (384)	decuplo minor est po-
392	665527 (64)	testate 100rij æquè al-
88	1058613 (448)	tâ; ergo refume
5	6108158 (32)	1017002 (456)
9606930(8)	901728 (480)	520099 (2)
396069 (8)	Quæ potestas rur-	1006857 (458)
9229310 (16)	fus plusquam decuplo	599 (1)
139229 (16)	minor est potestate	1001823(459)
8518016 (32)		

Cum igitur 460^{ma} potestas termini 99[5] deficiat ab æquè altâ 100rij plusquam decuplo; at 459^{na} ejusdem termini 99[5] deficiat ab æquè altâ 100rij minus quam decuplo; ajo, rationem 100 ad 99[5] contineri in decupla plusquam 459 vicibus, minus autem quam 460.

Tum, Ut differentia potestatum 459^{na} & 460^{ma} (nimirum 5009) ad differentiam 459^{na} & justæ (putâ 1823:) Ita 10000, ad 3639. Quare ratio 100 ad 99 [5] continetur in decupla 459[3639] vicibus.

Porro

Porro, Si decupla (sive ratio 100 ad 99[5 sumta 459[3639 vicibus) continet ratiunculas 1,0000000; quot ejusmodi ratiunculas continebit ratio 100 ad 99[5 semel sumta. Prodeunt 21769[3 ratiunculae, quae sunt exacta mensura rationis 100 ad 99[5, quâ scilicet ratio 99[5 ad 1 deficit à ratione 100 ad 1, hoc est, à bis decuplâ, quâ cum constet ratiunculis 2,0000000, demtis hinc 21769[3, restat mensura rationis 99[5 ad 1, hæc scilicet 1,9978230[7, qui proinde est Log-us absoluti 99[5.

Atque hoc modo æstimationis rationum quantitativis in communi quadam mensura, non solum natura & usus Logarithmorum clarius elucescit; sed & constructio eorundem multo facilior evadit. Id quod magis perspicuum fiet, cum ostendero alterum etiam longè promptiorem modum rationes æstimationi. Sed amolienda est prius difficultas, quæ, haut scio, an cuiquam detecta, plures utique in errorem induxit. Cum enim ratio duobus terminis intercedens vulgò haut aliter consideretur, quàm accipiendo alterutrum terminum ut antecedentem, & alterum ut consequentem; unde cum ratio est quanta (hoc est, cum termini sunt inæquales) vel major terminus est antecedens, & dicitur ratio majoris inæqualitatis, vel minor est antecedens, & dicitur ratio minoris inæqualitatis: Ajo ego, eandem rationem iisdem terminis conceptam posse ac debere (saltem in Musicis, atque in hac nostra Logarithmotechnia) alio etiam modo considerari ita, ut neuter terminorum existimetur tanquam antecedens, vel consequens, sed uterque capiarur simul pariter tempore atque ordine. Sic v. gr. in Musicis intervallum diapente, sive ratio $\frac{3}{2}$ vel $\frac{2}{3}$, potest quidem accipi ita, ut numerus undationum ab acutiori phthongo in aere excitatarum, nempe ternarius, sit antecedens, & binarius, exhibens numerum undationum pari temporis spatio à graviore phthongo effectarum, sit consequens, dum intelligatur acutior phthongus tempore (vel saltim cogitatione) præcedere graviolem; & vice versâ: sed nihil vetat, quò minus etiam ambo isti phthongi simul atque eodem tempore consonent, adeoque neuter altero sit vel tempore vel naturâ prior. Cœterum nihilo majus ob hoc vel minus evadit intervallum diapente (ratione sesquialterâ constans) sive acutior phthongus præcedat graviolem, sive contrâ, seu denique ambo simul consonent. Ita, licet utilis sit demonstrationibus Geometricis consideratio vulgaris, quâ minor terminus antecedens ad majorem consequentem dicitur minorem rationem habere, quàm idem ille major tanquam antecedens ad eundem minorem tanquam consequentem obtineat: Negari tamen haut potest, eundem numerum ratiuncularum contineri in sesquialtera ratione, sive ternarius sit antecedens, sive binarius, sive neuter; adeoque considerationem antecedentis & consequentis in æstinanda mole vel mensura rationum nullum instar habere.

Non

Non secus ac quinaris negatus (-5) mole haud differt a quinario affirmato ($+5$) cum uterque constet quinque unitatibus; dissimulatâ nimium affectione, propter quam negatus vel affirmatus censetur, & solâ mole vel quantitate simpliciter aestimatâ: cum tamen accipiendo quinarium negatum, prout signo negationis affectus est, verum sit, eum minorem esse, non modo quovis numero affirmato, sed & omni negato, qui à nihilo minus differat, quàm ipse, quales sunt binarius vel ternarius negatus (-2 , vel -3 .) Ubi præter molem numeri consideratur quoque, utram in partem eadem abeat à nihilo, affirmatam an negatam. Ita quoque sive unisonum (vel æqualitatis rationem, quæ quantitate caret, atque ideò rectè componitur nihilo) ponas in phthongo graviore (vel in binario) indeque ascendas ad phthongum intervallo diapente acutiorem (vel ad ternarium,) sive contra ponas unisonum in acutiori (vel æqualitatis rationem in ternario) indeque descendas ad phthongum intervallo diapente graviorem (vel ad binarium:) certè eadem est utrobique quantitas intervalli Musici (atque idem numerus ratiuncularum intercedentium) licet ab unisono (vel ab æqualitatis ratione, tanquam nihilo) in diversas planè partes abeat. Unde si moles sola, aut quantitas rationis æstimetur, dissimulando utram in partem (majorisne, an minoris inæqualitatis) vergat ab æqualitate; nihilo major est ratio ternarii ad binarium, quàm binarii ad ternarium. Sed si cum mole unâ includas quoque, considerationem processus à majori termino ad minorem, vel contra, non eo inficias, minorem esse quamvis rationem minoris inæqualitatis non modo quâvis ratione majoris inæqualitatis, sed & quâvis aliâ minoris inæqualitatis, quæ ab æqualitate minus absit. Ita ratio antecedentis 5 ad consequentem 8, non modo minor est ratione antecedentis 8 ad consequentem 6 (vel 5) sed eadem quoque minor est ratione antecedentis 6 (vel 7) ad consequentem 8: licet sepositâ vel neglectâ notione antecedentis & consequentis, eadem sit moles rationis; atque. Distinguemus igitur deinceps inter quantitates mole-majores, & affectione-majores: ita ut in rationibus notio inæqualitatis majoris vel minoris nil nisi affectionem innuat. Eas porrò rationes appellamus mole-majores, quarum major terminus divisus per minorem, dat quotum majorem; & vice versâ. Præterea majoris inæqualitatis rationum quæcunque mole, eadem & affectione majores sunt; at minoris inæqualitatis rationes quæ sunt mole majores, eò affectione minores sunt. Quibus præmissis, digeremus ea, quæ restant, in propositiones.

C

PROPO-

PROPOSITIO I.

Si duæ quantitates ejusdem affectionis auferantur ab invicem (affirmata sc. ab affirmata, vel negata à negata) sitque quantitas reliqua ejusdem affectionis cum duabus ab initio datis; quantitas ablata mole-minor est quantitate ex qua auferebatur. Sin quantitas reliqua diversæ sit affectionis à duabus initio datis; quantitas ablata mole-major est quantitate ex qua auferebatur. Sit exempli gr.

ratio subducenda	ratio ex qua	ratio reliqua	
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{24}{25}$	} tres scilicet rationes ejusdem affectionis, puta minoris inæqualitatis singulæ; ergo, inquam, ratio subducta $\frac{5}{8}$ mole-minor est ratione ex qua $\frac{3}{5}$. Sit rursus
)))	

ratio subducenda	ratio ex qua	ratio reliqua	
$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{16}$	} quarum priores duæ sunt ejusdem affectionis, nimirum majoris inæqualitatis ambæ, at tertia $\frac{15}{16}$ diversæ est affectionis, puta inæqualitatis minoris; ergo, inquam, ratio subducta $\frac{8}{5}$ mole-major est ratione ex qua $\frac{3}{2}$.
)))	

PROPOSITIO II.

Si sint quotcunque rationes continuæ & terminorum æquidifferentium, v. gr. $\frac{a}{a+b}, \frac{a+b}{a+2b}, \frac{a+2b}{a+3b}$, & deinceps, faciendo scilicet antecedentem cujusque ex posterioribus rationibus æqualem consequenti proximè præcedentis, & a minoribus progrediendo ad majores: Erit quælibet præcedentium rationum mole-major qualibet sequente; sed & differentiarumque adeo omnium in infinitum, semper præcedens mole-major est sequente. Sin à majoribus terminis progrediare ad minores; contrarium eveniet.

Patet ex collatione sequentis tabellæ cum propositione prima.

Rationes.

Rationes. Diff: primæ.

Differentiæ secundæ.

a	
$a+b$	$aa+2ab+bb$
	$aa+2ab$
$a+2b$	$a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3$
$a+3b$	$a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4$
	$aa+4ab+4bb$
	$aa+4ab+3bb$
$a+2b$	$a^4+10a^3b+36aabb+54ab^3+27b^4$
$a+3b$	$a^4+10a^3b+36aabb+56ab^3+32b^4$
	$aa+6ab+9bb$
	$aa+6ab+8bb$
$a+3b$	$a^4+14a^3b+72aabb+56ab^3+128b^4$
$a+4b$	$a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4$
	$aa+8ab+16bb$
	$aa+8ab+15bb$
$a+4b$	
$a+5b$	

Propositio III.

Si quotcunque rationum continuarum, quarum termini sint æquidifferentes, prima eademque minima vocetur a, differentia autem primæ & secundæ rationis vocetur b, tum ex differentiis secundis prima vocetur c; atque ex tertiis prima vocetur d; & sic porro: Aio secundam rationem fore $a+b$, tertiam $a+2b+c$, quartam $a+3b+c+d$ quintam $a+4b+6c+4d+e$; atque ita deinceps, componendo singulas rationes ex prima & tot differentiis, quot quæque locis abest à prima, iplis autem differentiis iungendo coefficients numeros figuratos, primis quidem radices, secundis trigonales, tertiis pyramidales, atque ita porro, singulosque adeò, prout naturali serie ordinantur in subiecta Tabella:

C 2

Unitates

Unitates.	radices.	trigonales.	pyramidales.	trigono-trigonales.	trigono-pyramidales.	pyramidi-pyramidales.	trigono-pyramidi-pyramidales.	trigono-pyramidi-pyramidi-pyramidales.	pyramidi-pyramidi-pyramidi-pyramidales.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	
1	4	10	20	35	56	84	120		
1	5	15	35	70	126	210			
1	6	21	56	126	252				
1	7	28	84	210					
1	8	36	120						
1	9	45							
1	10								

Nimirum eodem modo, quo iidem figurati numerant complementa potestatum à radice binomia genitarum; observato ascensu obliquo à sinistra dextrorsum.

Sic undecima ratio constat ex $a + 10b + 45c + 120d + 210e + 252f + 210g + 120h + 45i + 10k + l$; sumtis ordine numeris imam tabellæ basin occupantibus.

Exhibet

Exhibet autem tabella non modò quotam velis rationem, sed & summam quotcunque continuè sequentium, pari fermè negotiò methodoque. Sic summa quinque rationum est $5a+10b+10c+5d+e$, observato ascensu obliquo, ut antè.

Rationes.	Demonstratio.			
	diff: primæ.	Secundæ.	Tertiæ.	4
a	b			
a+b		c		
	b+c		d	
a+2b+c		c+d		e
	b+2c+d		d+e	
a+3b+3c+d		c+2d+e		
	b+3c+3d+e			
a+4b+6c+4d+e				

Cum enim per præcedentem, progrediendo à majoribus terminis ad minores (vel quod idem est, à minoribus rationibus ad majores) non modò secunda ratio excedat primam, sed & primarum, secundarum, cæterarumque differentiarum secunda quæque excedat primam; licebit sanè istos excessus vocare b, c, d, & deinceps.

Cum a. differentiarum tertiarum prima sit
 Et quartarum prima (quâ secunda tertiarum excedit primam) $d \}$ Ex hy-
 Erit sanè secunda tertiarum $e \}$ pothesi;
 $d+e$
 Rursus cum secundarum differentiarum prima sit $c \}$ Ex hy-
 Et tertiarum prima (quâ altera secundarum excedit primam) $d \}$ pothesi;
 Erit sanè altera secundarum $c+d$
 Sed 2da 3tiarum (quâ tertia secundarum excedit alteram) erat $d+e$
 Ergo tertia secundarum erit $c+2d+e$
 Porro cum primarum differentiarum prima sit $b \}$ Ex hy-
 Et secundarum prima (quâ secunda primarum excedit primam) $c \}$ pothesi;
 Erit sanè secunda primarum $b+c$
 Sed altera secundarum (quâ tertia primarum excedit 2dam) erat $c+d$
 Ergo tertia primarum $b+2c+d$
 Sed & 3tia 2darum (quâ quarta primarum excedit 3tiam) erat $c+2d+e$
 Ergo quarta primarum erit $b+3c+3d+e$
 Denique cum prima ratio sit $a \}$
 Et differentia inter primam & secundam rationem $b \}$ Ex hypothesi;
 Erit sanè secunda ratio $a+b$
 Et cum differentiarum primarum secunda foret $b+c$
 Erit tertia ratio $a+2b+c$ Sed

Sed & differentiarum primarum tertia erat

Ergo quarta ratio

Tandem differentiarum primarum quarta erat

Ergo quinta ratio

$$\begin{aligned} & b+2c+d \\ & a+3b+3c+d \\ & b+3c+3d+e \\ & a+4b+6c+4d+e \end{aligned}$$

Postremò rationes

{	Prima	a
{	Secunda	$a+b$
{	Tertia	$a+2b+c$
{	Quarta	$a+3b+3c+d$
{	Quinta	$a+4b+6c+4d+e$

}

addantur,

fit summa quinque rationum $5a+10b+10c+5d+e$.

Rationes vel magnitudines.

Prima	a
$\frac{2}{1}$	$a+b$
$\frac{3}{1}$	$a+2b+c$
$\frac{4}{1}$	$a+3b+3c+d$
$\frac{5}{1}$	$a+4b+6c+4d+e$
$\frac{6}{1}$	$a+5b+10c+10d+5e+f$
$\frac{7}{1}$	$a+6b+15c+20d+15e+6f+g$
$\frac{8}{1}$	$a+7b+21c+35d+35e+21f+7g+h$
$\frac{9}{1}$	$a+8b+28c+56d+70e+56f+28g+8h+i$
$\frac{10}{1}$	$a+9b+36c+84d+126e+126f+84g+36h+9i+k$

Propositio IV.

Si quocunque rationum continuarum, quarum termini sint æquidifferentes, prima eadèmq; maxima vocetur a , differentia autem primæ & secundæ vocetur b , tum differentiarum secundarum prima vocetur c , tertiarum prima d , & sic deinceps; Aio secundam rationem fore $a+b$, tertiam $a+b+c$, quartam $a+3b+3c+d$, quintam $a+4b+6c+4d+e$; atque ita deinceps, alternatis semper signis affirmatis & negatis. Demonstratur ut præcedens.

Propositio V.

Data rationis multiplicem invenire prope verum.

Constructio. Differentiam terminorum datæ rationis duc in denominatorem multiplicis dati, & à facto aufer ipsam differentiam, reliqui semissem adde termino majori, & detrahe minori; ita prodibunt duo termini exprimentes rationem paulò minorem quasitâ. Tum si termini prodeuntes sint

sint fortè numeri mixti ex integris & fractis; reducantur ad purè fractos, quorum denominatoribus omissis, ratio quæ sita censebitur in numeratoribus integris & à fractione liberis. *V. gr.* Quæ ratur rationis $\frac{2}{3}$ quadruplum. Differentia terminorum 3 ducta in 4 exhibet 12, unde ablatis tribus restant 9, cujus semis $4\frac{1}{2}$ additus termino majori 28, facit $32\frac{1}{2}$, detractus autem minori 25, relinquit $20\frac{1}{2}$; erit igitur ratio $20\frac{1}{2}$ ad $32\frac{1}{2}$ paulò major quadruplo rationis $\frac{2}{3}$. Reductis terminis $20\frac{1}{2}$ & $32\frac{1}{2}$ ad purè fractos, fiunt $4\frac{1}{2}$ & $6\frac{1}{2}$, omissisque denominatoribus, erit ratio $\frac{4}{6}$ paulò major quæ sita.

Demonstratio hujus & sequentis propositionis constabit ex propositione VII.

Propositio VI.

Data rationis partem imperatam invenire prope verum.

Constructio. Differentiam terminorum data rationis divide in partes totidem, quot denominator partis quæ sita constat unitatibus, atque ex iis partibus exemta unâ, reliquarum semissem adde termino minori, & detrahe quoque majori; ita probibunt duo termini exprimentes rationem paulò minorem quæ sita: Tum si termini prodeuntes sint fortè numeri mixti ex integris & fractis; reducantur ad purè fractos, quorum denominatoribus omissis, ratio quæ sita censebitur in numeratoribus integris, & à fractione liberis. *V. gr.* Oporteat rationis $\frac{2}{5}$ invenire partem quintam. Differentia terminorum 2 divisa quinquiesariam exhibet $\frac{2}{5}$, quæ est una pars quinta, eximenda ex integra summa quinque partium, quæ erat 2, & restant $\frac{8}{5}$, quarum semis $4\frac{1}{5}$ additus termino minori 3, facit $3\frac{4}{5}$; detractus verò ex majori 5, reliquum facit $4\frac{1}{5}$; erit igitur ratio $3\frac{4}{5}$ ad $4\frac{1}{5}$ paulò minor, quàm pars quinta rationis $\frac{2}{5}$. Reductis terminis $3\frac{4}{5}$ & $4\frac{1}{5}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{19}{5}$ & $\frac{21}{5}$, omissisque denominatoribus, erit ratio $\frac{19}{21}$ paulò minor quæ sita. Rursus inveniendus sit rationis $\frac{8}{11}$ semis. Differentia terminorum 3 bipartita exhibet $1\frac{1}{2}$, qui est unus semis, eximendus ex integra summa duarum partium 3, & restat $1\frac{1}{2}$, cujus semis $2\frac{1}{4}$ additus termino minori 8, facit $8\frac{3}{4}$; detractus autem ex majori 11, relinquit $10\frac{1}{4}$; erit igitur ratio $8\frac{3}{4}$ ad $10\frac{1}{4}$ paulò minor semisse rationis $\frac{8}{11}$. Reductis terminis $8\frac{3}{4}$ & $10\frac{1}{4}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{35}{4}$ & $\frac{41}{4}$, omissisque denominatoribus, erit ratio $\frac{35}{41}$ paulò minor quæ sita.

Propositio VII.

Invenire, quantum pars rationis imperata, quæ per præcedentem invenitur, deficiat ab exactiori.

Constructio.

Constructio. Primò, si partis imperatæ denominator sit numerus impar, sume rationes, quæ sunt rationi per præcedentem inventæ utrinque vicinæ & æquidifferentes, ita habebis tres rationes, quarum minimam aufer à mediâ, & mediâ à maxima, prodibunt duæ differentiæ, quarum differentiam denudò investigabis, tantisper asservandam. Deinde partis imperatæ denominatori unitatem detrahe, reliqui semissem in tabula Figuratorum insertâ prop. III, quære inter radices, & invento congruentem numerum trigonalem excerptum tripartire, sic inuenies, quoties sumenda sit differentiarum differentia supra asservata, ut acquiras particulam, quâ pars imperata, quæ per præcedentem inueniebatur, deficit ab exactiori. V.gr. Scire velim, ratio $\frac{12}{11}$ per præcedentem inventa quantum deficiat ab exactiori quinta parte rationis $\frac{1}{5}$. Rationi $\frac{12}{11}$ utrinque vicinæ & æquidifferentes sunt $\frac{17}{19}$ & $\frac{21}{23}$. Differentia minimæ à mediâ $\frac{432}{441}$ & mediæ à maxima $\frac{357}{361}$, & harum differentiarum differentia $\frac{157637}{177559}$ asservanda. Tum partis imperatæ denominatori 5 detraho 1, restant 4, cujus semissi 2 inter radices invento congruit trigonalis numerus 3, cujus triens est 1, indicans differentiarum differentiam supra asservatam $\frac{157637}{177559}$ semel sumtam exhibere particulam, quâ ratio $\frac{12}{11}$ deficit ab exactiori quinta parte rationis $\frac{1}{5}$, adeo ut hujus exactior pars quinta sit ratio $\frac{12}{11} +$ ratione $\frac{157637}{177559}$.

Sin partis imperatæ denominator sit numerus par; sume semissem differentiæ terminorum rationis per præcedentem inventæ, quem ejusdem termino minori detrahes, & majori addes pariter ac detrahes; ita obtinebis quatuor rationes continuas terminorum æquidifferentium, ex quibus minorum duarum differentiam auferes ex majorum duarum differentia, & emergentem differentiarum differentiam asservabis. Deinde partis imperatæ denominatorem bipartire, & invento semissi congruentes in tabella propositioni III. subjuncta species excerpe, saltem usque ad c speciem, positoque $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 1\frac{1}{2}$; duc cujusque speciei valorem in suum coefficientem, collectisque omnibus in unam summam, habebis, quot vicibus sumenda sit differentiarum differentia supra asservata, ut acquiras particulam, quâ pars imperata, quæ per præcedentem inueniebatur, deficit ab exactiori. Ex.gr. Rationis $\frac{8}{11}$ octans per præcedentem inventus sit $\frac{149}{155}$; Scire velim, quantum is deficiat ab exactiori. Differentia terminorum est 6, cujus semis 3 detractus minori termino, relinquit 146; additus autem majori, facit 158; & detractus majori, relinquit 152. Sunt ergo quatuor rationes continuæ terminorum æquidifferentium $\frac{146}{149}$, $\frac{149}{152}$, $\frac{152}{155}$, $\frac{155}{158}$. Differentia duarum minorum rationum $\frac{24016}{24025}$ ablata à differentia duarum majorum

jorum

jorum $\frac{22192}{22201}$ relinquit differentiarum differentiam $\frac{1753825}{1753879}$ asservan-
dam. Partis imperatæ denominator est 8, cujus semissi 4 congruunt in
tabella propositioni III subjuncta species istæ: $a+3b+3c$; sed $a=\frac{1}{2}$, &
 $3b=6$, & $3c=4$, quæ juncta faciunt $10\frac{1}{2}$. Ergo differentiarum differen-
tiæ $\frac{1753825}{1753879}$ suprâ servatæ sumendum est decuplum cum semisse, ut ac-
quiramus particulam, quâ octans per præcedentem inventus deficit ab ex-
actiori. Atqui rationis $\frac{1753825}{1753879}$ decuplum per V hujus est $\frac{1753582}{1754122}$
vel $\frac{876791}{877061}$, & semis per VI est $\frac{3507677}{3507731}$; adeo ut rationis $\frac{1}{11}$ octans
exactior præter rationem per præcedentem inventam $\frac{14}{11}$ contineat etiam-
num ratiunculas $\frac{876791}{877061}$, & $\frac{3507677}{3507731}$.

Demonstratio.

Cum per III hujus summa trium rationum continuarum, terminis æqui-
differentibus contentarum sit
Erit ejusdem summæ triens
Rursus differentia primæ & secundæ rationis est
secundæ autem & tertiæ
Ergo differentiarum differentia
Cujus triens
Quem si addas mediæ trium rationum
Erit summa
Æqualis nempe trienti trium rationum suprâ notato literâ a . Ergo dif-
cerptâ ratione quavis in tres continuas terminorum æquidifferentium, ut ju-
bet propositio VI, erit media ex iis paulò minor triente totius discerptæ, &
quidem tantò minor, quantus est triens differentię differentiarum interce-
dentium inter rationem primam & secundam, nec non inter secundam &
tertiam, quod innuit propositio VII.
Sic quoque per III hujus, summa sedecim rationum continuarum,
terminis æquidifferentibus contentarū, est $16a+120b+560c+11820d$
Et ejusdem summæ octans
 $2a+15b+70c+227\frac{1}{2}d$

D

Tum

Tum per tabellam propositioni
III subjunctam, quatuor mediæ ex
istis sedecim, nimirum 7^{ma}, 8^{va}, 9^{na},
10^{ma}, sunt

Differentia duarum priorum
posteriorum

Differentiarum differentia

Hujus decuplum

& semis

Unâ cum summa duarum ex quatuor istis mediâ. $2a + 15b + 49c + 91d$
Facit $2a + 15b + 70c + 228d$

Æqualem octanti sedecim rationum suprâ notato literâ β . Ergo si ratio
data discerpatur in partes sedecim, erunt duæ mediæ ex iis simul, paulò
minores octante totius discerptæ; & quidem tantò minores, quantum est
differentiæ differentiarum (intercedentium inter rationes ex sedecim istis
septimam & octavam, nec non inter 9^{nam} & 10^{nam}) decuplum cum se-
mis. q. e. d.

Propositio VIII.

Rationes terminorum æquidifferentium sunt propemodum, ut reciprocè
ipsorum terminorum mediâ Arithmetica.

Explicatio. Sumatur per VI hujus rationis cujusvis, v.gr. $\frac{8}{9}$ pars quævis,
v.gr. semis $\frac{3}{2}$, tum pars quævis alia, v.gr. triens $\frac{2}{3}$, & ut fiant terminorum
æquidifferentium, pro $\frac{8}{9}$ sumatur $\frac{16}{9}$, & pro $\frac{2}{3}$ æquipollens $\frac{4}{3}$. Medium
Arithmeticum terminorum rationis totius est 17, semissis, 34, trientis 51.
Liquet igitur, ut tota ratio $\frac{16}{9}$ est ad semissem suum $\frac{3}{2}$, ita reciprocè semissis
medium Arithmeticum 34 esse ad medium totius 17: & ut tota ratio $\frac{4}{3}$ est
ad trientem suum $\frac{2}{3}$, ita reciprocè trientis medium Arithmeticum 51
esse ad medium totius 17: ideoque etiam, ut semis $\frac{3}{2}$ est ad trientem $\frac{2}{3}$,
ita reciprocè trientis medium 51 esse ad medium semissis 34: Tantum
porrò hanc analogiam abire à vero, quantum semisses, trientes, partesve
aliæ rationum per VI hujus inventæ deficiunt ab exactis. Quamobrem id
agendum, ne defectus ille instituto nostro officiat. Caterum minor erit
defectus, minúsque adeò officiet, quò rationes in analogiam adscitæ mino-
res fuerint. Cum enim secundum demonstrationem præcedentis, octans
exactus sedecim rationum foret $2a + 15b + 70c + 227\frac{1}{2}d$, at summa dua-
rum ex sedecim istis mediârum $2a + 15b + 49c + 91\frac{1}{2}d$, qui est octans
per VI inventus; patet differentiam horum octantium consistere in con-
temptiori

temtiori parte secundarum & tertiarum differentiarum. Atqui rationum continuarum minores, habent differentias primas minores, ac proinde differentiarum secundarum & tertiarum partem exiliorem multò etiamnum minorem. Sed exemplo res fiet illustrior. Nam rationis $\frac{199}{201}$ semis, per VII hujus, est $\frac{199}{201} + \frac{7999399}{7999401}$, ubi ratio $\frac{199}{201}$ ab exactiori semisse deficit

rationculâ superbipartiente $\frac{7999399}{7999401}$. Rursus rationem $\frac{199}{201}$ (quæ pri-

us assumta $\frac{199}{201}$ propemodū semis, est) si denuò bipartiamur per VII hujus, habebimus $\frac{399}{401} + \frac{127997599}{127997601}$, ubi ratio $\frac{399}{401}$ ab exactiori semisse deficit ra-

tionculâ superbipartiente $\frac{127997599}{127997601}$. Minor est igitur defectus, cum

bipartimur rationem minorem $\frac{199}{201}$, quàm si bipartiamur majorem $\frac{399}{401}$, quanto scilicet rationcula superbipartiens $\frac{127997599}{127997601}$ minor est superbi-

partiente $\frac{7999399}{7999401}$, hoc est propemodum, quanto 8 milliones minores

sunt 128 millionibus, nimirum sedecim vicibus. Sed & ejusdem rationis quo minor pars sumetur per VI hujus, eò minùs deficiet à vero. Sic ratio-

nis $\frac{99}{101}$ semis, per VII hujus, erat $\frac{199}{201} + \frac{7999399}{7999401}$, & ejusdem triens per

eandem est $\frac{299}{301} + \frac{8099459197}{8099460797}$, ubi quidem triens $\frac{299}{301}$ (qualis per

VI invenitur) minùs deficit ab exactiori, quàm semis $\frac{199}{201}$ (per eandem in-

ventus;) quanto rationcula $\frac{8099459197}{8099460797}$ minor est alterâ $\frac{7999399}{7999401}$.

Unde sequitur, cum bipartitâ ratione $\frac{99}{101}$ secundum VI hujus, non nisi bina-

rium quasi perdamus in octo millionibus, vel unitatem in quatuor millioni-

bus; futurum, ut istius semisse $\frac{199}{201}$ (sive $\frac{99}{100} \frac{5}{5}$) diminuto quovis modo

per analogiam VI^{te} hujus superstructam, minùs etiam perdamus; adeoque à

ratione $\frac{99}{100} \frac{5}{5}$ nos analogicè argumentari posse ad quamvis minorem

terminorum æquidifferentium, ita ut minùs quàm unitatem perdamus in

quatuor millionibus; quòque ratio, ad quam argumentamur, minor fuerit, eò jacturam fore minorem.

D 2

Propositio

Propositio IX.

Datâ mensurâ rationis $\frac{99}{100} [5]$ in particulis, qualium decupla continet 1,0000000; invenire mensuram cujusvis minoris rationis terminorum æquidifferentium, in particulis similibus.

Rationis $\frac{99}{100} [5]$ mensura suprâ inventa fuit 21769 [3, & rationis $\frac{100}{100} [5]$ mensura ibidem 21659 [7, quarum summa exhibet rationem $\frac{99}{100} [5]$ = 43429 [0. Dehinc oporteat nos invenire mensuram rationis $\frac{100}{101}$. Ergo per præcedentem dic:

Ut medium Arithmeticum terminorum $\frac{100}{101}$ (nimirum 100 [5]) ad medium Arithmeticum terminorum $\frac{99}{100} [5]$ (nimirum 100;) ita mensura hujus rationis (putâ 43429) ad mensuram istius 43213. Tot igitur particulis Log-us absoluti 101 excedit Log-um absoluti 100. Quare, cum Log-us absoluti 100 sit 2,0000000; oportet, ut Log-us absoluti 101 sit 2,0043213.

Forrò invenienda sit mensura rationis $\frac{101}{102}$. Dic:

Ut medium Arithmeticum terminorum $\frac{101}{102}$ (nimirum 101 [5]) ad medium Arithmeticum terminorum $\frac{99}{100} [5]$ (nimirum 100;) ita mensura hujus rationis (putâ 43429) ad mensuram istius 42787. Tot igitur particulis Log-us absoluti 102 excedit Log-um absoluti 101. Quare, cum Log-us absoluti 101 foret 2,0043213; oportet, ut Log-us absoluti 102 sit 2,008600.

Cum autem in omnibus hisce analogiis terminus secundus sit 100, & tertius 43429; liquet, ad inveniendam mensuram cujusvis rationum sequentium nihil amplius restare, quàm ut dividamus numerum 43429 per medium Arithmeticum terminorum rationis datæ. Cæterum invenimus

nos quidem rationis $\frac{99}{100} [5]$ mensuram 43429, quæ fortè debebat esse unitate major, putâ 43430; sed facillè intelligit quivis, si pro ratione $\frac{99}{100} [5]$ assumissemus

assumissimus $\frac{999}{1000} \left[\frac{5}{5} \right]$, & in cumulandis horum terminorum potestatibus calculum ad plures locos extendissimus, ad maiorem utique præcisionem perveniri potuisse, adeoque huic methodo ad accuratam facilitatem nihil quicquam deesse. At non deest modus etiam hoc ipso facilior, qui post acquisitos paucos Logarithmos solâ additione rem peragit, & præterea probam suam secum fert, quem propositionibus sequentibus breviter exponemus.

Propositio X.

Rationum duarum continuarum differentia est ad aliarum duarum continuarum differentiam; ut harum communis termini quadratum, ad istarum communis termini quadratum; dummodo singularum termini sint æquidifferentes.

Sint duæ rationes continuæ $\frac{a}{a+b}$, & $\frac{a+b}{a+2b}$, quarum terminus communis est $a+b$, & hujus quadratum $aa+2ab+bb$; sint verò & aliæ duæ continuæ $\frac{a+3b}{a+4b}$, & $\frac{a+4b}{a+5b}$, quarum communis terminus est $a+4b$, & hujus quadratum $aa+8ab+16bb$. Singularum termini differunt communi excessu b . Differentia duarum priorum est $\frac{aa+2ab}{aa+2ab+bb}$, & posteriorum duarum $\frac{aa+8ab+16bb}{aa+8ab+16bb}$. Atque hæ differentiæ sunt quoque terminorum æquidifferentiam. Ergo per VIII hujus, sunt propemodum, ut reciproce ipsorum terminorum media Arithmetica; hoc est, ut prior differentia $\frac{aa+2ab}{aa+2ab+bb}$ ad posteriorem $\frac{aa+8ab+16bb}{aa+8ab+16bb}$ ita horum terminorum medium Arithmeticum $aa+8ab+15\frac{1}{2}bb$, ad medium Arithmeticum istorum $aa+2ab+\frac{1}{2}bb$; hoc est propemodum, ut communium terminorum quadrata, nimirum $aa+8ab+16bb$ ad $aa+2ab+bb$; quæ ab istis mediis Arithmeticis non nisi quantitate $\frac{1}{2}bb$ differunt, exigua sanè, & in rationibus minoribus (ubi sc. differentia terminorum b ad ipsos terminos exiguum instar habet) faciliè continendâ.

Propositio

Propositio XI.

Rationum trium continuarum differentiarum differentia, est ad aliarum trium continuarum differentiarum differentiam, ut cubus medii Arithmetici mediæ ex his, ad cubum medii Arithmetici mediæ ex istis; dummodo singularum rationum termini sint æquidifferentes.

Sint tres rationes continuæ $\frac{a}{a+b}, \frac{a+b}{a+2b}, \frac{a+2b}{a+3b}$, quarum differentia differentiarum est $\frac{a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3}{a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4}$, & mediæ illarum

medium Arithmeticum est $a+\frac{3b}{2}$, cujus cubus $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$; sint verò & aliæ tres continuæ $\frac{a+2b}{a+3b}, \frac{a+3b}{a+4b}, \frac{a+4b}{a+5b}$, quarum

differentia differentiarum est $\frac{a^4+14a^3b+72aabb+160ab^3+128b^4}{a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4}$, & mediæ illarum medium Arithmeticum $a+\frac{7b}{2}$, cujus cubus $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$.

Caterum singulæ rationes differunt communi excessu b ; at differentiæ differentiarum non sunt terminorum æquidifferentium, siquidem differentia terminorum prioris est $2ab^3+3b^4$, at posterioris $2ab^3+7b^4$; secus ac in præcedenti propositione. Quare cum illic res expediretur regulâ proportionum simplici inversâ, hic opus est duplici inversâ; nimirum:

Ut medium Arithmeticum prioris differentiæ differentiarum (nimirum $a+\frac{3b}{2}$) ductum in differentiam terminorum posterioris ($2ab^3+7b^4$) ad medium Arithmeticum posterioris differentiæ differentiarum (nimirum $a+\frac{7b}{2}$) ductum in differentiam terminorum prioris ($2ab^3+3b^4$).

Ita differentia differentiarum prior ad posteriorem: Ita quoque Cubus medii Arithmetici mediæ trium priorum rationum (nimirum $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$) ad Cubum medii Arithmetici mediæ trium posteriorum rationum (nimirum $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$).

Quæ

Quæ analogia vera esse deprehendetur, si productum extremorum æquale sit producto mediorum.

Atqui primus terminus $a^4 + 6a^3b + 12a^2b^2 + 9ab^3 + \frac{3b^4}{2}$ in $2ab^3 + 7b^4$
 $= 2a^5b^3 + 19a^4b^4 + 66a^3b^5 + 102a^2b^6 + 66ab^7 + \frac{21b^8}{2}$, si ducatur in

quartum $a^3 + \frac{21aab}{2} + \frac{63abb}{4} + \frac{343b^3}{8}$; productum est $2a^8b^3 + 40a^7b^4$
 $+ 297a^6b^5 + 1180a^5b^6 + 2991\frac{1}{2}a^4b^7$, &c.

Rurfus secundus terminus $a^4 + 14a^3b + 72a^2b^2 + 161ab^3 + \frac{263b^4}{2}$ in
 $2ab^3 + 3b^4 = 2a^5b^3 + 28a^4b^4 + 144a^3b^5 + 322a^2b^6 + 263ab^7 + 789\frac{1}{2}b^8$,

si ducatur in tertium $a^3 + \frac{9aab}{2} + \frac{27abb}{4} + \frac{35b^3}{8}$; productum est $2a^8b^3$
 $+ 40a^7b^4 + 339a^6b^5 + 1593a^5b^6 + 4558\frac{1}{8}a^4b^7$, &c.

Hoc igitur productum cum isto, non modò in primis & secundis speciebus, sed & in maxima parte tertiarum & quartarum; ajo analogiam in propositione memoratam, veram esse. Nam defectus, qui hic apparet in productis terminorum, in ipsis terminis longè minor erat, quippe qui multiplicando crevit: Ut taceam in minoribus rationibus differentias secundas & tertias nullius ferè momenti esse.

Simili modo ostendetur, differentias tertias rationum continuarum & terminorum æquidifferentium, esse ut Quadrato-quadrata; quartas, ut Quadrato-cubos terminorum, qui singulis in tabella propositioni II sub-junctâ, è regione opponuntur. Atque ita deinceps.

Propositio XII.

Numerorum in progressione Arithmetica ordinatorum Quadrata conveniunt in differentiis secundis, Cubi in tertiis, Quadrato-quadrata in quartis, & sic deinceps.

Patet ex inspectione tabellarum subjectarum:

Numeri Quadrata diff. 1. diff. 2.

1	1		
2	4	3	
3	9	5	2
4	16	7	2

Numeri

Numeri Cubi diff. 1. diff. 2. diff. 3.

1	1		
		7	
2	8	12	
		19	6
3	27	18	
		37	6
4	64	24	
		61	

Numeri Quadrato-quadrata. diff. 1. diff. 2. diff. 3. diff. 4.

1	1				
		15			
2	16	50			
		65	60		
3	81	110	84	24	
		175	194	24	
4	256	369	108		
		625	302		
5		671			
6	1296				

Hinc patet, datis v. gr. cubis quatuor, vel quadrato-quadratis quinque, quo pacto ceteri continuâ additione succenturiari possint. Sint enim dati

Cubi diff. 1. diff. 2. diff. 3.

$a=8$

$e=19$

$b=27$

$h=18$

$f=37$

$k=6$

$c=64$

$i=24$

$k=6$

$d=125$

$g=61$

$l=..$

$m=..$

$n=...$

$\text{Dic: } k+i=l, l+g=m, m+d=n.$

Propositio XIII.

Logarithmos quotvis locorum continuâ ac solâ additione producere ita, et ultimo existente probò, ceteri omnes sint probi. Con-

Constructio. Cum sit $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ca}{bb} + \frac{cca}{b^3} + \frac{c^3a}{b^4}$, & deinceps continuando progressionem in infinitum; si ponamus $a=100$ = medio Arithmetico rationis $\frac{99[5}{100[5}$ & $b=100000$, & $c=0[5$, adeò ut $b-c$ sit $99999[5$ = medio Arithmetico rationis datae $\frac{99999}{100000}$, ejus mensuram invenire oportet, erit $\frac{a}{b-c}$ (nimirum $\frac{100}{99999[5}$)
 $= \frac{a}{b} + \left(\text{sive } \frac{100}{100000} \text{ vel } 0[001 \right) + \frac{ca}{bb} \left(\text{sive } \frac{0[5 \times 100}{10000000000} \text{ vel } \frac{50}{10000000000} \text{ vel } 0[000000005 \right) + \frac{cca}{b^3} \left(\text{sive } \frac{0[25 \times 100}{100000000000000} \right.$
 $\text{vel } \frac{25}{1000000000000000} \text{ vel } 0[00000000000025 \left. \right) + \frac{c^3a}{b^4}$
 $\left(\text{sive } \frac{0[125 \times 100}{100000000000000000000} \text{ vel } \frac{1[25}{100000000000000000000} \right.$
 $\text{vel } 0[000000000000000000125 \left. \right) = 0[001000005000025000125:$

sin manentibus a & b , ut antè, ponatur $c=1[5$; erit $\frac{a}{b-c} = 0[001000015000225003375$: vel si rursus manentibus a & b , ponatur $c=2[5$; erit $\frac{a}{b-c} = 0[001000025000625015625$. Liquet ex præcedenti, quo pacto datis numeri 5 quadrato & cubo, sequentium quoque numerorum 15, 25, cæterorumque quadrata & cubi additione continuâ inveniri possint. Istis igitur numeris cum suis quadratis & cubis ritè dispositis ita, ut post unitatem in 0[001 sextum locum occupet ultima figura numeri 5 (vel 15, vel 25;) & sextum ab hac locum ultima figura quadrati 25 (vel 225, vel 625;) & ab hac rursus sextum locum ultima figura cubi 125 (vel 3375, vel 15625; (quemadmodum exempla superiora ostendunt: conflati erunt numeri, qui in tertium Regulæ aureæ terminum 43429 ducendi sunt singuli, ut prodeat mensura rationum datarum $\frac{99999}{100000}$, $\frac{99998}{99999}$, $\frac{99997}{99998}$. Atque hæc multiplicatio, ut solâ quoque additione perficiatur, digerendus est tertius terminus 43429 in tabellam subsidiariam, hoc modo:

E

I

1	43429
2	86858
3	130287
4	173716
5	217145
6	260574
7	304003
8	347432
9	390861

Acquisitâ hoc modo rationum omnium mensurâ à $\frac{99999}{100000}$ usque ad $\frac{10000}{10001}$ in particulis, qualium decupla continet 1,0000000; mox addendo has ordine retrogrado concinnabimus Logarithmos singulorum absolutorum à 10000 ad 100000, quorum ultimus si sit probus, præcedentes omnes erunt probi; nisi fortè error posterior quasi ex condicito corrigat priorem, quod in hac non magis quàm omnibus aliis probis, nec nili rarissimè usuenire potest.

A Tque ita expositâ methodo construendi Logarithmos novâ, accuratâ, & facili, haud scio, an opus sit monere Lectorem, si ad præxin accedere luberet, non requiri compositorum numerorum Logarithmos; ideoque omnes pares primùm excludendos, deinde omnes a quinario productos; ita ut restent soli Logarithmi numerorum in unitatem, 3rium 7rium 9rium exeuntium, atque horum quoque tertium quemque, cum sit ex ternario compositus, omitti posse. Sic acquisitis Logarithmis absolutorum 1003 & 10012, omisso Log-o absoluti 10023 ex ternario compositi querendus est Log-us absoluti 10033, utpote tricesimi ab absoluto 10003; tum Log-us absoluti 10043, tricesimi ab absoluto 10013: tum rursus omisso Log-o numeri 10053, querantur Log-i numerorum 10063, 10073; atque ita deinceps. Quare dicendum per Regulam Propositione VIII. traditam:

Ut 10048, nimirum medium Arithmeticum inter 10033 & 10063, ad 10018, nimirum medium Arithmeticum inter 10003 & 10033:
Ita 13006, nimirum differentia Logarithmorum congruentium absolutis 10003 & 10033,

ad

ad 12967, differentiam Log-orum competentium absolutis 10033
& 10063.

Dico:

Ut $\left\{ \begin{array}{l} 10048 \\ 10078 \\ 10108 \\ \&c. \end{array} \right\}$ ad 10018; ita 13006, ad $\left\{ \begin{array}{l} 12967 \\ \&c. \end{array} \right\}$

Item:

Ut $\left\{ \begin{array}{l} 10058 \\ 10088 \\ 10118 \\ \&c. \end{array} \right\}$ ad 10028; ita 12992, ad $\left\{ \begin{array}{l} 12953 \\ \&c. \end{array} \right\}$

At tertius qui sequitur ordo, nimirum:

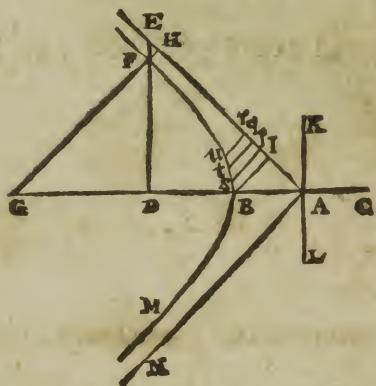
Ut $\left\{ \begin{array}{l} 10068 \\ 10098 \\ \&c. \end{array} \right\}$ ad 10038; ita 12979, ad $\left\{ \begin{array}{l} 12940 \\ \&c. \end{array} \right\}$

hic ipse est, quem omittendum indigeto.

Pari modo tertius quisque in unitatem 7rium, 9rium exeuntium omittetur. Itaque fiet, omiſſis paribus lucrificamus ſemiſſem operæ, & detractis quinariis rursus partem decimam, denique excluſo tertio quoque in 1, 3, 7, 9, deſinentium, trientem laboris reſidui; unde non niſi $\frac{4}{15}$. nonaginta chiliadum, quæ ſunt à 10000 ad 100000, induſtriam noſtram expectant. Hoc eſt, de 90 chiliadibus reſtant ſolum 24 concinnandæ. Cæteros compoſitos à 7rio, 11rio, aliis ve primis genitos, non eſt operæ pretium ſecernere in methodo tam proclivi; præſertim cum probando calculo inſervire poſſint.

Cæterum ex iis, quæ hætenus diſſeruimus, ſatis liquet, naturam Logarithmorum Geometriæ nullo modo obnoxiam eſſe; ſed verius ac liquidius ex proprio ſuo fonte manare. Intercedit tamen utriſque cognatio ſuavis, & contemplatione digniſſima, quam deinceps paucis exponere non gravabor.

Propositio XIV.



Sit Hyperbole MBF , cujus latus rectum KL æquale sit transverso BC ; erunt asymptoti AN & AE ad angulos rectos, & quadratum DF æquale rectangulo CDB per 21. I. Conicor. Ex B & F cadant perpendiculares ad asymptoton BI & FH . Dico, AH esse ad AI , ut BI ad FH .

Demonstratio. Sit $AB = 1 = AC$

$$BC = AB + AC = 2$$

$$BD = a$$

$$AD = AB + BD = 1 + a = DE$$

$$CD = BC + BD = 2 + a$$

$$CD \times BD = 2 + a \text{ in } a = 2a + aa = Q: DF$$

$$DF = \sqrt{2a + aa} = DG$$

$$AG = AD + DG = 1 + a + \sqrt{2a + aa}$$

$$\sqrt{2} \cdot 1 :: AG \cdot AH$$

$$AH = \frac{1 + a + \sqrt{2a + aa}}{\sqrt{2}}$$

$$EF = DE - DF = 1 + a - \sqrt{2a + aa}$$

$$\sqrt{2} \cdot 1 :: EF \cdot FH$$

FH

$$FH = \frac{1+a-\sqrt{2a+aa}}{\sqrt{2}}$$

Ducatur AH in FH ;

ponendo $1+a=c$, & $\sqrt{2a+aa}=d$
erit $1+2a+aa=cc$
& $2a+aa=dd$ } subtrahe

$$\frac{cc-dd}{\sqrt{2}*\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = AH*FH$$

$$\sqrt{2}.1 :: AB.AI$$

$$AI = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AI*BI = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \beta$$

Ergo per α & β , $AH*FH=AI*BI$
& $AH.AI :: BIFH$ q.e.d.

Propositio XV.

In diagrammate præcedenti, posita $AI=BI=1$, & $HI=a$;
oporteat invenire FH .

Dic per præcedentem: ut AH ad AI , ita BI ad FH ; hoc est,

$1+a.1 :: 1. \frac{1}{1+a}$; nimirum FH æqualit est unitati divisæ per $1+a$. Perficitur autem divisio ipso opere sic:

$$\begin{array}{r} \text{b } c \text{) } d \\ 1+a \quad 1 \\ \quad f \quad g \\ \quad 1+a \\ \quad \hline \quad h \quad i \\ \quad 0-a \\ \quad \quad l \quad m \\ \quad \quad -a-aa \\ \quad \quad \hline \quad \quad n \quad o \\ \quad \quad 0+aa \\ \quad \quad \quad r \\ \quad \quad \quad q \quad 3 \\ \quad \quad \quad aa+a \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad t \\ \quad \quad \quad s \quad 3 \\ \quad \quad \quad 0-a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} e \\ 1 \\ \quad k \\ \quad -a \\ \quad \quad p \\ \quad \quad +aa \\ \quad \quad \quad u \\ \quad \quad \quad 3 \\ \quad \quad \quad -a \end{array}$$

Ap

$\begin{matrix} & b & c & d & e & e & b & c & f & g \\ \text{Applica } 1+a & \text{ad } 1, & \text{oritur } 1, & \text{tum } 1 & \text{in } 1+a & \text{producit } 1+a & \text{sub-} \\ & d & h & i & b & c & h & i \\ \text{ducendum ex } 1, & \text{\& restat } 0-a. & \text{Rursus } 1+a & \text{applicetur ad } 0-a, \\ & k & k & h & i & l & m \\ \text{oritur } -a; & \text{tum } -a & \text{in } 0-a & \text{producit } -a-aa, & \text{subducendum ex} \\ & h & i & n & o & b & c & p \\ 0-a, & \text{\& restat } 0+aa. & \text{Ad hoc applica } 1+a, & \text{oritur } +aa; & \text{quod} \\ & b & c & q & 3 & n & o & s & 3 \\ \text{ductum in } 1+a & \text{gignit } aa+a, & \text{subducendum ex } 0+aa, & \text{\& restat } 0-a. \\ \text{Atque ita continuatâ operatione, deprehenditur } \frac{1}{1+a} & = 1-a+aa-a^3 \\ & +a^4 (\&c.) = FH. \end{matrix}$

Propositio XVI.

Quovis numero in partes æquales innumeras discerpto; invenire summam quarumvis potestatum ab innumeris istis numeris genitarum.

Numeri dati potestas proximè superior potestatibus quæsitis, si dividatur per exponentem suum, extabit summa potestatum quæsitæ.

V. gr. Numerus datus sit 21, hic si discerpatur in partes innumeras, continebit non modò hos numeros 20, 19, 18, 17 &c. sed & innumeros interjectos, quorum quisque intelligitur ductus in unam partem infinitissimam numeri 21. Horum igitur omnium productorum summam si quæras; quoniam ipsa producta sunt potestates primæ (sive lineæ;) erit potestas proximè superior quadratica; & ejus exponens 2. Ergo dati numeri 21 quadratum 441, si dividatur per exponentem 2, extabit summa omnium primarum potestatum, genitarum ab innumeris istis numeris, qui in dato numero 21 continentur, nimirum 220½. Rursus quævis potestas prima intelligatur ducta in seipsam, & oporteat nos invenire summam omnium istorum quadratorum. Potestas proximè superior est cubica, & ejus exponens 3. Ergo dati numeri 21 Cubus 9261, si dividatur per exponentem 3, extabit summa omnium quadratorum 3087. Horum quadratorum quodvis ducatur in suum latus, & oporteat nos invenire summam omnium istorum cuborum. Potestas proximè superior est quadrato-quadratica, & ejus exponens 4. Ergo dati numeri 21 quadrato-quadratum 194481, si dividatur per exponentem 4, extabit summa omnium cuborum 48620½.

Demonstratio.

Demonstratio. Summa omnium ab unitate imparium æqualis est quadrato numeri terminorum sic numerus terminorum omnium imparium ab unitate usque ad 21 est 11, cujus quadratum 121 æquale est summæ omnium horum imparium; 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. At idem quadratum 121 duplicatum, nimirum 242, excedit summam omnium eorundem imparium unà cum paribus inclusis ipso numero terminorum 11; deficit autem à summa omnium parium æque ac imparium eodem numero terminorum 11. Ergo quadratum duplicatum numeri terminorum imparium non potest excedere vel deficere à summa omnium tam parium, quam imparium, plusquam ipso numero terminorum imparium, hoc est (si termini sint innumeri) eodem numero terminorum live dimidio termini maximi, ducto in partem infinitissimam numeri dati. Quod productum si quis putet, adhuc rationem aliquam obtinere ad summam omnium terminorum; nondum utique divisus est numerus datus in partes innumeras, quod est contra hypothelin. Ergo quadratum dimidii numeri terminorum (tam parium quam imparium) duplicatum; vel, quod idem est; Dimidium quadrati numeri omnium terminorum (tam parium quam imparium) æquale est summæ omnium terminorum.

Rursus; Numerus pyramidalis ultimi ab unitate imparium, æqualis est summæ omnium quadratorum ab iisdem imparibus factorum. Sic numeri 21, tanquam ultimi imparium, pyramidalis 1771, æqualis est summæ omnium quadratorum factorum ab his imparibus, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Unde haud secus, ac modò, conficietur; eundem pyramidalem duplicatum (si termini sint innumeri) vel, quod idem est; trientem cubi facti à numero dato, æqualem esse summæ omnium quadratorum ab imparibus æquè ac paribus factorum.

Item; Ultimi cujusvis Trigonus in se ductus, æqualis est summæ omnium cuborum ab imparibus æquè ac paribus factorum. Sed Trigonus iste, sive summa terminorum, suprà æqualis erat $\frac{\text{Quadrato}}{2}$,

ergo ejusdem. Trigoni quadratum æquale est $\frac{\text{Quadrato quadrato}}{4} =$ summæ omnium Cuborum. Atque ita deinceps.

Propositio XVII.

Quadrare Hyperbolam.

In diagrammate præcedenti, positio $AI=1$; intelligatur asymptotus inde ab I versus E divisa in partes æquales innumeras, quæ sint v.gr.

$Ip=pq=qr=a$. Erit, per XIV & XV hujus, $ps=1-a+aa-a^3$
 $+a^4$, &c. & $qt=1-2a+4aa-8a^3+16a^4$, &c. & $ru=$
 $1-3a+9aa-27a^3+81a^4$, &c. Sed $ps+qt+ru=$ areæ $BIru=$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1-a+aa-a^3+a^4 \\ 1-2a+4aa-8a^3+16a^4 \\ 1-3a+9aa-27a^3+81a^4 \end{array} \right\} \&c. =$$

$$= 3-6a+14aa-36a^3+98a^4,$$

hoc est, = numero terminorum contentorum in linea Ir , minus summâ
 eorundem terminorum, plus summâ quadratorum ab iisdem, minus sum-
 mâ cuborum, plus summâ quadrato-quadratorum, &c.

Hinc posito, ut antè, $IA=1$; sed $Ip=0$; $I=$ numero termi-
 norum: inuenio, per XV & XVI hujus, aream $BIps=$ numero termi-
 norum $=0$, minus summa eorundem terminorum $=0005$,
 plus summa quadratorum ab iisdem $=000033333$, minus summa
 cuborum $=0000025$, plus summa quadrato-quadratorum $=0000002$,
 minus summa quadrato-cuborum $=0000000166$, plus summa cubo-
 cuborum $=0000000014$, &c.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} + \left\{ \begin{array}{l} 01 \\ 000033333 \\ 0000002 \\ 000000014 \end{array} \right. \\ + 0100335347 \\ - 0005025166 \\ + 0095310181 \end{array} & \begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 0005 \\ 0000025 \\ 0000000166 \end{array} \right. \\ - 0005025166 \end{array} \\ \hline & = \text{areæ } BIps. \end{array}$$

Sic posito $Iq=021$ = numero terminorum: inuenio, per XV &
 XVI hujus, aream $BIqt=$ numero terminorum $=021$, minus
 summa eorundem terminorum $=002205$, plus summa quadratorum
 ab iisdem $=0003087$, minus summa cuborum $=0000486202$, plus
 summa quadrato-quadratorum $=0000081682$, minus summa quadrato-
 cuborum

cuborum = 0|000014294, plus summa cubo-cuborum = 0|00001572,
minus summa quadrato-quadrato-cuborum = 0|000000472 plus sum-
ma quadrato-cubo-cuborum = 0|000000088.

$$\begin{array}{r}
 \int \begin{array}{r} 0|21 \\ 0|003087 \\ 0|000081682 \\ 0|0000002572 \\ 0|0000000088 \\ 0|0000000003 \end{array} \\
 + \begin{array}{r} 0|213171345 \\ 0|022550984 \end{array} \\
 + 0|190620361 = \text{areae } BIqr.
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 \int \begin{array}{r} 0|02205 \\ 0|000486202 \\ 0|000014294 \\ 0|000000472 \\ 0|000000016 \end{array} \\
 - 0|022550984
 \end{array}$$

Unde apparet, ut ratio AI ad Ap (1 ad 1|1) est dimidiata rationis
 AI ad Aq (1 ad 1|21;) ita aream $BIps$ esse dimidiam areæ $BIqr$.
Cæterum proclive est hunc calculum extendere ad quotvis loca, quod mihi
tentanti, prodiit area $BIps$ = 0|09531017980432486004395212
— — 328076509222060534; & area $BIqr$ = 0|1906203596—
= 0864972008790424656153018444121072, quam cum exactè
duplam deprehenderem istius superioris scivi inde me calculum rectè
posuisse.

Propositio XVIII.

*Comparare areolas Hyperbolicas cum ratiunculis absolutorum aquidiffe-
rentium.*

In diagrammate præcedenti, positâ $AI=1$, & asymptoto inde ab
 I versus E divisâ in partes æquales innumeras, quæ sint $v, gr. Ip, pq, qr$:
erit areola $BIps$ mensura ratiunculæ, quam AI obtinet ad Ap ; &
areola $spqt$ mensura ratiunculæ, quam Ap obtinet ad Aq ; & areola
 $tgru$ mensura ratiunculæ, quam Aq obtinet ad Ar , &c. Atque areolæ
istæ supputantur prorsus eodem modo, quo suprà Propositione VIII
& IX. rationes terminorum æquidifferentium. Id quod paucis in-
dicare, oportuum duxi.

E

Propositio

Propositio XIX.

Invenire summam Logarithmorum.

In eodem diagrammate positâ $AI = 1$, & asymptoto inde ab I versus E divisâ in partes æquales innumeras, quæ sint v , gr . Ip , pq qr . oportet invenire summam areolarum; $B Ips + B Iqt + B Iru$ (&c.) = summæ Logarithmorum = solido, constanti ex areola $B Ips$ perpendiculariter insistente lineæ ps , & areola $B Iqt$ perpendiculariter insistente lineæ qt , & areola $B Iru$ perpendiculariter insistente lineæ ru , &c. ductis nimirum singulis in unam infinitissimam lineæ datæ.

Constructio hujus Problematis congruit cum constructione propositionis XVII. substituendo nimirum pro numero terminorum, summam eorundem; & pro summa terminorum, summam quadratorum; & pro summa quadratorum, summam cuborum; &c. Sic positâ $AI = 1$, & $Ip = 0.1$, oporteat nos invenire summam omnium Logarithmorum inde ab 1 ad 0.1.

$$\begin{array}{r}
 + \left\{ \begin{array}{l} 0.005 \\ 0.00008333 \\ 0.000000033 \end{array} \right. \quad || \quad - \left\{ \begin{array}{l} 0.00016666 \\ 0.0000005 \\ 0.00000002 \end{array} \right. \\
 + \quad 0.005008366 \quad || \quad - \quad 0.000167168 \\
 - \quad 0.000167168 \\
 \hline
 0.004841198 = \text{summæ omnium Log-orum.}
 \end{array}$$

Hinc patet, quomodo productum continuum omnium à 1 ad numerum datum Arithmetice progredientium inveniri queat. Nam summa Log-orum, est Log-us producti continui.

Pater quoque ex præcedentibus, quo pacto Problema *Mersennianum*, si non Geometricè saltem in numeris, ad quotvis usque locos solvi possit. Atque hic jam filum abrumpere cogor, tantisper dum otium pertexendi reliqua largiatur Deus.

FINIS.

Siquitur

MICHAELIS ANGELI RICCI
GEOMETRICA Exercitatio.

Præfatio.

ABBATI
STEPHANO GRADIO
Michael Angelus Riccius S. P. D.

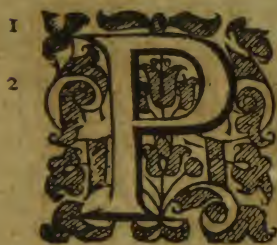
SCRPTIONEM hanc meam argumen-
ti, ut vides, inter Mathematica difficilli-
mi, sed æquè ad difficiliora quaque Pro-
blematum efficienda, & obscuriora Theo-
rematum cognoscenda utilissimi, cum in
Geometrico, tum in Analytico pulvere, ad te mitten-
dam duxi, vir ornatissime, STEPHANE GRADI,
quem ego unum omnium hujus Civitatis plurimi facio,
ob egregias animi laudes, præsertim verò propter acre
his de rebus existimandi judicium, quotidianis gravis-
simarum inter nos disputationum experimentis mihi
perspectum & cognitum. Lege quæso illam diligenter,
& ubi diù exactissima tuæ censuræ subiectam habue-
ris, ecquid respondeat solitæ tuæ de meis hoc in genere
cogitationibus, opinioni, pronuncia. Nam si hoc
assequar, ut tibi cæterisque Amicis earundem Disci-
plinarum intelligentibus probetur, minus erit in posterum
quam ob rem humanissimis tuis hortationibus oblueter,
cum autor mihi esse perseverabis edendi alia quæ tecum
jampridem communicavi, de præceptis universæ Artis
analyticæ, geometricæ methodo breviter & expeditè
demonstratis, unà cum animadversione erratorum quæ
in ipsis tradendis magni nominis Auctores errasse depre-
hendi;

hendi; faciliusq; obtinebis ne diutius premam apud me
quæcumque de Geometria in genere disputata & literis
consignata incertas propositiones redegi; & ex his illam
præcipuè à Torricellio, & à te quoq; tan topere com-
mendatam, quæ integram doctrinam triginta propositi-
onum Archimedis, Lucæ Valerii, & aliorum, una
complectitur; duasque præterea, quibus totam penè Jo.
Caroli de la Faille de centro gravitatis partium circuli,
& ellipseos doctrinam [justo volumine ab ipso explica-
tam] absolvo. Statui autem parca aliquot hujus
scripti exemplaria typis imprimere, quò commodius
possint ad peritos hujusmodi scientiarum Amicos, tum
per Italiam, tum exteras apud gentes pervenire, ac-
censo potiùs ea in re tuo studio obsecutus, quàm inge-
nio meo. Neque enim is ego sum, cui nomen famæ per
ambitionem ingerere libeat; aut quem non magis inda-
gatæ veritatis cognitio, quàm cognitæ ostentatio dele-
ctet. Interim hunc amicitie nostræ jampridem insti-
tutæ, & literario præcipuè commercio nunquam coli
intermissæ, fructum jucundissimum feram, ut quæ hac
in re de me sentis amicè, hoc est [ut Euripidi placet]
liberè, te loquentem audiam; eoque, quid ceteri &
sentiant & loquantur, securus fiam. Vale, Romæ
octavo Idus Julii 1666.

1

MICHAELIS ANGELI
RICCII
GEOMETRICA
EXERCITATIO.

DEFINITIONES.



Otestatem quamlibet, ejusque radicem, voco dignitatem.

Si Dignitas in Dignitatem ducatur, ut A^2 in B^3 , fiet productum A^2 in B^3 ; cui producto illud simile dicimus, quod gignitur ex Dignitatibus graduum eorundem. Ita, in facta hypothefi, productum E^2 in C^3 , ex quadrato & cubo, simile est producto A^2 in B^3 .

3 Homogenea producta sunt quæ ad eundem gradum pertinent; ut duo rectangula, quippè quæ ad secundum gradum pertinent; & duo solida, quæ ad tertium.

4 Terminos cum dico, intelligi volo duos numeros seu æquales seu inæquales, vel numerum & unitatem, vel duas unitates. Terminos inæquales appello duos numeros inæquales, vel numerum & unitatem. Terminos autem æquales, duos æquales numeros; vel duas unitates.

5 Productum in linea fieri secundum terminos datos, aut positos, dicimus, quum illud fit ex duabus dignitatibus, quarum exponentes sunt ipsi termini dati vel positi; radices verò segmenta illius rectæ lineæ sectæ in proportionem terminorum eorundem.

Sit verbi causa, quæpiam recta linea, cujus majus segmentum ad minus sit in ratione 3 ad 2; productum ex cubo segmenti majoris in quadratum minoris erit factum in linea data secundum terminos positos 3, & 2; quia segmenta quæ sunt dignitatum radices habent rationem numeri 3 ad 2, & exponentes earundem dignitatum sunt etiam 3, & 2.

Rursus

Rursus esto, quemadmodum segmentum majus ad minus ejusdem lineæ, sic 3 ad 1, productum ex cubo majoris segmenti in segmentum ipsum minus, erit productum in linea factum secundum terminos positos, numerum & unitatem. Ita, A^3 in B^1 [si A vocetur majus segmentum, B verò, minus] est productum factum in linea $A + B$ secundum terminos 3, & unitatem, quia radices A & B sic sunt, ut est numerus 3 ad unitatem, & dignitatis A^3 exponens est, 3, numerus datus; dignitatis B^1 exponens est, unitas, item data.

Lemma Primum.

SI duæ rectæ in eadem ratione secantur, producta similia facta ex segmentis tanquam ex radicibus, erunt proportionalia productis homogeneis quæ fient ex totis.

Fig. I.

Sint AB , DE , rectæ, in punctis C , & F ita sectæ, ut quam rationem AC ad CB habet, eandem habeat DF ad FE , & fiant ex illarum segmentis producta AC^2 in CB^3 , & DF^2 in FE^3 , quæ sunt similia per secundam definitionem; iisque homogenea producta fiant ex totis AB , DE , nimirum AB^5 , DE^5 per tertiam definitionem. Dico AC^2 in CB^3 eandem rationem habere ad AB^5 , ac DF^2 in FE^3 ad DE^5 . Quia rationes ex quibus ratio producti AC^2 in CB^3 ad AB^5 componitur, eadem sunt, ac componentes rationem producti DF^2 in FE^3 ad DE^5 , ob sectionem linearum proportionalem, & inde proportionales dignitates ex quibus producta illa resultant. Quod, &c.

Lemma Secundum.

Iisdem positis, Dico, AC^2 in CB^3 fuerit maximum omnium similium productorum ex binis segmentis rectæ AB , etiam DF^2 in FE^3 fore maximum productorum similium ex binis segmentis rectæ DE , tanquam ex radicibus.

Singulis enim productis ex segmentis rectæ DE alia respondent orta ex segmentis rectæ AB in eadem proportionem sectæ; & illa ad homogeneum suum DE^5 eandem rationem habent, atque ista ad suum AB^5 , ex primo Lemmate. Ratio quidem AC^2 in CB^3 ad AB^5 , ex hypotheli, est eadem, ac ratio DF^2 in FE^3 ad DE^5 ; cæterorum verò productorum ex segmentis ipsius DE ad DE^5 , eadem est atque ratio productorum

3

productorum sibi respondentium, quæ sunt ex segmentis rectæ AB, ad AB 5. Cum igitur ratio AC 2 in CB 3 [quod maximum esse ponitur] ad AB 5 sit major, per octavam quinti Elem., ratione caterorum productorum sibi similium ad AB 5; major etiam erit ratio DF 2 in FE 3 ad DE 5, quam ratio caterorum similium productorum ex segmentis rectæ DE ad DE 5; ac proinde ipsum DF 2 in FE 3 per decimam quinti Elem. est maximum. Quod, &c.

Lemma Tertium.

SI data recta linea secetur in ratione terminorum inæqualium, & dividendo, fiat segmentorum differentia ad minus segmentum, ut differentia terminorum ad minorem terminum; hæc inventa proportionalitas vel ipsa erit proportionalitas æqualitatis, vel alia, in quam incidemus, iterum dividendo, & sic deinceps; & in eâ terminorum differentia æquabitur minori termino, & differentia segmentorum segmento minori.

Esto AC ad CB, ut 9 ad 6, & AD differentia segmentorum AC, Fig. II. CB: erit dividendo, 3 ad 6, ut AD ad CB, vel ad segmentum sibi æquale, DC: Quoniam vero hæc proportio non est proportio æqualitatis, fiat DE differentia segmentorum AD, & DC; 3, differentia numerorum 6 & 3; & dividendo, erit, ut 3 ad 3, sic DE ad AD, proportio æqualitatis.

Rursus AC sit ad CB, ut 5 ad 3; & AD segmentorum differentia; dividendo erit, AD ad CB, seu ad sibi æquale segmentum DC, ut 2 ad 3. Et iterum dividendo [segmentorum AD & DC, esto, differentia, EC,] 1 ad 2 ut EC ad AD seu DE; & tertio [facta FE terminorum DE & EC differentia] dividendo inveniemus, ut 1 ad 1, ita FE ad EC. Quod, &c.

Ratio Lemmatis est, quod duorum quorumcumque numerorum differentia, vel differentia numeri & unitatis, semper est numerus aut unitas, ut per se patet: & nos dividendo, semel atque iterum, ac sæpius, demimus semper minorem terminum divisæ proportionalitatis qui est numerus vel unitas, de majori termino seu numero, utimurque deinceps residuo tantum [quod est eorum terminorum differentia] & comparamus illud cum minori termino proportionalitatis divisæ: at non possumus sic demendo progredi in infinitum, quia unitates in terminis sunt finitæ, sed exhauritur tandem omnis differentia, residuumque majoris termini proportionalitatis divisæ æquatur termino minori. Ita fit proportio æqualitatis, in

Fig. III

in qua unitas ad unitatem, vel numerus ad sibi æqualem numerum, est ut segmentum ad aliud æquale segmentum. Quod ostendere oportebat.

Quod si ab ea proportionem æqualitatis, in qua desitum est rursus incipiamus, Dico nos componendo gradatim, venturos per vestigia divisionis ad terminos primæ proportionalitatis, in qua segmenta datæ lineæ erant in ratione inæqualium terminorum. Cujus propositionis rationem facile intelliget Geometra, quem latere non potest, in Geometria omnia quæ dividendo concluduntur, ex contrario converti posse, & componendo concludi illud ipsum, quod ponebatur ante divisionem, ut in quinto Elementorum ostenditur. Exempli gratia, sit majus segmentum datæ rectæ ad minus, ut 2 ad 1. Igitur Dividendo 1 ad 1, est ut differentia segmentorum ad minus segmentum. Ex hac porro æqualitatis proportionem componendo redimus ad primam proportionem, in qua segmenta erant in ratione 2 ad 1. Quod, &c.

Lemma Quartum.

SI duo quolibet producta orta sint ex duabus dignitatibus ductis in aliam communem dignitatem, quam rationem habent illæ duæ dignitates inter se, eandem habent duo producta. Sic productum AB^3 in BC^5 eam rationem habet ad productum AB^3 in EP^5 , quam habet dignitas BC^5 ad dignitatem EP^5 , in quas duas dignitates ducta communis dignitas AB^3 illa producta effecit.

Ex definitione multiplicationis probatur hoc Lemma, quod alii in numeris demonstrarunt.

Lemma Quintum.

DAtis quatuor quantitibus, quarum prima ad secundam habeat minorem rationem, quam tertia ad quartam, productum quod gignitur ex duabus extremis est minus producto ex mediis.

Augeatur prima donec fiant quatuor geometricè proportionales, tunc prima in quartam ducta efficiet productum æquale producto ex mediis. Igitur productum quod efficiebat ante quàm augeretur, erat productum minus eodem producto ex quantitibus mediis. Quod &c.

T H E O R E M

THEOREMA PRIMUM

Productum in aliqua recta linea factum secundum positos terminos æquales, maximum est omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis linea data segmentis tanquam ex radicibus.

Recta linea AB secetur æqualiter in puncto C, & sit AC ad CB ut 3 ad 3 [termini æquales positi] Dico productum AC³ in CB³, quod sit in linea AB secundum positos terminos, esse omnium similium productorum maximum. Sumpto quolibet alio puncto D, faciamus aliud simile productum AD³ in DB³. Cum autem sint quatuor lineæ arithmetice proportionales cum excessu CD, nimirum AD, AC, CB, & BD, minor est ratio maximæ AD ad AC, quàm CB ad BD; & triplicata ratio ipsius AD ad AC [seu ratio AD³ ad AC³] minor est, quàm triplicata ipsius CB ad BD [seu CB³ ad BD³] & per quintum Lemma, productum ex mediis quantitatibus, AC³, in CB³, majus est producto AD³ in BD³ facto ex duabus extremis. Eodem pacto demonstratur AC³ in CB³ esse alio quocumque simili producto majus, & consequenter omnium similium maximum. Quod, &c.

Fig. IV.

THEOREMA SECUNDUM.

Si duo recta linea segmenta fuerint in ratione terminorum inæqualium, & per consequens, dividendo, sit differentia segmentorum ad minus segmentum, ut differentia terminorum ad minorem terminum; quoties ex dignitate differentia segmentorum ducta in dignitatem minoris segmenti sit productum maximum, toties sit etiam maximum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in dignitatem majoris; atque ita, si dignitates segmentorum pro exponentibus habeant terminos positos, & dignitas differentia, differentiam terminorum.

Sit AB recta linea inæqualiter secta in puncto C, & BC ad AC, ut Fig. V. 5 ad 3, qui sint termini positi. Producatur BA in F, donec æquetur F C ipsi CB, & AF erit differentia segmentorum BC & AC. Quoniam vero segmentum majus BC sic est ad minus CA, ut 5 est ad 3, erit dividendo AF ad CA, ut est 2 ad 3. Nunc fiant duo producta qualia diximus, primum FA² in AC³, ex dignitate ipsius FA, differentia segmentorum, ducta in dignitatem minoris segmenti AC. Secundum AC³ in CB⁵, ortum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in dignitatem

G

dignitatem majoris. Prima dignitatis FA_2 habet pro exponente, 2_3 ; differentiam datorum terminorum, reliquæ habent 3_5 , terminos positos, ut imperabatur. Dico, si productum primum est maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ FC [esse autem ejusmodi supponamus], etiam secundum fore productum maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ positæ AB .

Sumatur in AB alius punctus præter punctum C , & esto, D ; qui accipi a nobis potest intra punctum C , vel supra. In utroque casu, FA nequit habere eam rationem ad AC , quam habet ad AD , sed majorem aut minorem habebit, atque adeo FD non est secta in puncto A secundum rationem ipsius FA ad CA : fiat porro FE ad ED , ut FA ad AC , & productum FE_2 in ED_2 , per secundum Lemma, erit maximum [æque ac productum FA_2 in AC_3] & consequenter majus simili producto FA_2 in AD_3 , factum ex segmentis ejusdem rectæ FD . Quod maximum FE_2 in ED_3 habet eandem rationem ad FD_5 , dignitatem sibi homogeneam, quam FA_2 in AC_3 ad FC_5 , ut ex duobus primis Lemmatibus colligitur; igitur FA_2 in AD_3 [quod diximus esse minus producto FE_2 in ED_3] minorem rationem habet ad FD_5 , quam FE_2 in ED_3 ad idem FD_5 , seu minorem, quam FA_2 in AC_3 ad FC_5 ; & permutando, FA_2 in AD_3 minorem habet rationem ad FA_2 in AC_3 [seu, per Lemma quartum, AD_3 minorem habet rationem ad AC_3] quam FD_5 ad FC_5 , & longè minorem, quam CB_5 ad BD_5 . Quippe sunt rectæ DB , CB , FC , & FD arithmetice proportionales cum excessu, DC ; ac propterea in primo casu, FD maxima, in secundo casu, FD minima, est ad FC in minori ratione quam CB ad DB , & quintuplicata ratio FD ad FC , nempe ratio ipsius FD_5 ad FC_5 , est minor quintuplicatâ ratione CB ad DB , seu CB_5 ad DB_5 .

Igitur cum quatuor quantitatum, AD_3 , AC_3 , CB_5 , & DB_5 , prima ad secundam habeat minorem rationem, quam tertia ad quartam, per quintum Lemma, productum AD_3 in DB_5 factum ex duabus extremis erit minus producto AC_3 in CB_5 ex mediis. Similiter ostendes, aliud quodcumque productum simile minus esse producto AC_3 in CB_5 , quia punctus D ad libitum sumitur. Ergo AC_3 in CB_5 productum est maximum omnium. Quod &c.

Hactenus de recta linea AB inæqualiter secta, quum est segmentum majus ad minus, uti numerus ad numerum. Restaret altera pars Theorematis, quum est quemadmodum majus segmentum ad minus, sic numerus

ad

ad unitatem. Hoc tamen constructione ac ratione tam similibus modò factis
concluditur, ut id sibi quisque invenire, explicare ac dilatare facillimè
possit. Lectoribus autem scribimus à Geometria & ab Algebra instructi-
oribus, quos hujuscemodi rerum intellectu facilius explicatione frustra
detrahemus; Quare pergitur ad reliqua usum præstantissimum habenti-
a ad inveniendas plurium linearum tangentes, figurarum centra gravitatis
& quadraturas, & ad alia item multa, quæ justo servamus Operi; ubi
dabimus novam solidorum Conicorum seriem, qui secti exhibent infinitas,
ut vocant, hyperbolas infinitas parabolas, infinitas ellipses, & ana-
logiam servando, circulos etiam infinitos. Unde Lectoribus manifestè
apparuit, de Conicis me plus multò adinvenisse, quàm ceteros, eosque
ingeniosissimos Viros, qui communem tantum hyperbolen, parabolam,
ellipsim, & circulum [figuras Conici in nostra nova serie prædicta, se-
cundi gradus] agnoverunt: alias tertii & quarti & ceterorum non item;
nisi quod de parabolis infinitis per puncta in plano descriptis pauca, licet
cognitione dignissima, tradidere nonnulli, quos inter, duo præcellentes
ingenio Viri, *Fermatius*, ac *Toricellius*, Præceptor meus, inventorum
præstantia & numero commendabiles, ac Veteribus proximi; qui novum
insuper excogitarunt hyperbolarum infinitarum genus. Neque prætereun-
dum puto, quamplures *Apollonii* propositiones atque demonstrationes aptari
sectionibus nostris & per omnia congruere, affectasque multipliciter æqua-
tiones harum sectionum ope resolveri facillimè, & determinari posse.
Nunc revertor ad rem.

THEOREMA TERTIUM.

Datâ rectâ lineâ, & duobus terminis, secundum quos fiat in linea data
productum: hoc erit maximum omnium similium productorum, quæ
fieri possunt ex binis ejusdem rectæ segmentis, velut ex radicibus.

Propositionem seco in partes duas. Primum dico, productum, quale
descripsimus, esse omnium similium maximum, quum dantur termini æqua-
les, quod in primo Theoremate demonstravimus.

Deinde si dantur termini inæquales, sic rem ostendo.

Esto AB recta data, & termini dati 5 & 2. Secetur recta in puncto Fig. VI.
C sitque BC ad CA, ut 5 ad 2. Dico productum BC 5 in CA 2
factum in linea data secundum terminos datos esse maximum. Producarur
BA in F, ut AF sit differentia segmentorum, & dividendo primam
proportionalitatem, nempe BC ad CA, ut 5 ad 2 [sicut in tertio
G 2 Lemmate

Lemmate præscribitur] pergamus usque dum incidamus in proportionem æqualitatis. In nostra hypothesi, primum erit, dividendo, 3 ad 2, ut FA differentia segmentorum ad AC minus segmentum, quam secundam proportionalitatem exhibet secunda figura, in qua fiat CE differentia segmentorum CA, FA; per consequens erit, dividendo, 1 ad 2, ut CE ad AC, quam quidem proportionalitatem seorsim exhibet tertia figura. Fiat EH differentia segmentorum CE & AC, dividendo erit 1 ad 1, ut EH ad EC; quæ est demum proportio æqualitatis; semper autem minus segmentum producimus ut æquemus majori, & segmentorum differentiam constituamus.

At retrorsum vicissim, incipiendo à recta EA tertiæ figuræ cujus majus segmentum AC est 2, minus segmentum CE est 1, & illorum differentia HE itidem 1. Quoniam productum HE 1 in CE 1 est maximum in linea CH, per primum Theorema nostrum, erit proinde, per secundum Theorema, EC 1 in CA 2 maximum in directæ EA.

Deinde in recta FC secundæ figuræ, majus segmentum AF est 3; minus AC est 2, & segmentorum differentia EC est 1; porro cum EC 1 in CA 2 sit maximum, erit per secundum Theorema, etiam maximum in recta FC productum AF 3 in AC 2.

Postremò in linea AB primæ figuræ, productum AF 3 in AC 2 est maximum, ut modò ostendimus, ergo per secundum Theorema est etiam maximum AC 2 in BC 5. Quod demonstrandum erat.

Si loco duorum numerorum detur numerus, & unitas, fit similis constructio, & demonstratio.

SCHOLION.

Id quod in secundo Theoremate supponebamus; datâ rectâ lineâ, & datis, numeris, 3 & 2, maximum fore productum in ea linea factum secundum numeros illos datos; nunc demonstravimus in Theoremate hoc. Erat porro illius Theorematis propositio conditionalis, ex posita illa hypothesi, non absoluta, ut patebit consideranti.

COROLLARIUM.

SI productum genitum ex dignitate ducta in dignitatem quamcumque; maximum fuerit, illarum dignitatum radices & exponentes erunt geometricè

9

meticè proportionales. Quippe in Theoremate ostendimus, productum in linea factum secundum terminos datos esse omnium maximum; at productum ejusmodi, ex 5. definitione nostra, gignitur ex duabus dignitatibus, quarum exponentes rationem eam habent, quam dignitatum earundem radices.

PROBLEMA PRIMUM.

DAtam lineam rectam ita secare, ut productum ex dignitatibus segmentorum sit omnium similium maximum.

Sumantur exponentes duarum illarum dignitatum, rectaque dividatur in ratione horum exponentium, & factum erit quod imperatur; quia productum erit in linea data factum secundum terminos positos, nimirum secundum exponentes; ac proinde erit maximum per Theorema tertium.

PROBLEMA SECUNDUM.

ÆQuationem determinare, in qua potestas quæsita radice negatur de homogeneo sub radice data, & dignitate sua parodica, ut $B \text{ in } A - A^2 \parallel Z^2$: vel $B \text{ in } A^3 - A^4 \parallel Z^4$, &c.

Oritur hujusmodi æquatio ex dicta parodica dignitate potestatis negatæ ducta in $B - A$, differentiam datæ & quæsitæ radice, Rem probo. Illa parodica dignitas affirmata, si primum ducatur in A , radicem quæsitam negatam, gignet potestatem negatam uno gradu altiore, quàm sit ea parodica dignitas [ut patet ex natura multiplicationis] deinceps in B radicem datam affirmatam ducta, gignet homogeneum affirmatum, sub eadem dignitate parodica & radice data: Quæ duo producta, sunt ipsa pars æquationis, de qua in Problemate. Pars altera est homogeneum comparisonis.

Rursus, per Lemma quartum, ratio homogenei ad potestatem negatam est eadem, ac radice datæ ad quæsitam; sed minor est potestas homogeneo, de quo ipsa negatur & demitur. Ergo etiam radix quæsita minor est datæ; In qua proinde radice datâ nos rectè sumimus segmentum æquale radici quæsitæ A , ut alterum segmentum sit $B - A$, differentia datæ ac quæsitæ radice.

Quoniam igitur prima pars æquationis oritur ex $B - A$ uno radice datæ segmento, ducto in altero segmentum A , vel in hujus potestatem, efficitur [per tertium Theorema] ut inde resultans productum sit maximum omnium similium, quotiescunque A , & $B - A$, segmenta rationem

nem habent eam, quam exponentes suarum dignitatum. Sic in æquatione B in A ; $-A^4 \parallel Z^4$; si A , & $B-A$ fuerint ut 3 ad 1, cubus segmenti A in B ductus gignet partem æquationis B in A $-A^4$; quæ est productum in linea data B , omnium similium maximum; cuius proinde magnitudinem non potest unquam excedere homogeneum comparationis, quod semper æquari necesse est illi alteri æquationis parti. Unde canon pro determinanda problematis æquatione conficitur.

Fiat in radice maximum productum secundum terminos, qui sunt exponentes ejusdem radicitis & parodica dignitatis, sub quibus est homogeneum. Illius producti magnitudinem excedere non potest homogeneum comparationis.

Idem procedit in alia æquatione orta ex multiplicatione ipsius A , in $B-A$, vel in hujus potestate; semper enim est idem casus tertii Theorematis nostri, in quo productum factum in linea [seu datâ radice B] secundum terminos datos est maximum, termini verò sunt exponentes dignitatum segmenti A & alterius $B-A$.

Sed uno vel altero exemplo de Geometricis nostris Opusculis deprompto methodi facilitatem comprobemus.

Fig. VII. E singulis punctis datæ rectæ AB ducantur rectæ CD , EF &c. rectæ inter se parallelæ, cum data AB angulum quemcumque efficientes. Sint autem harum parallelarum dignitates, & dignitates abscissarum AC , AE , &c. geometricè proportionales (id quod tripliciter contingere posse mox patebit) Transibit per extrema parallelarum puncta, D , F , &c. perimenter figuræ, cujus diameter aut axis erit AB , vertex A , ordinatim verò ad diametrum applicatæ erunt ipsæ parallelæ.

Fig. VIII. Nam parallelarum abscissarumque dignitates si fuerint ejusdem gradus, exempli gratiâ FE 1 ad DC 1, ut AE 1 ad CA 1: vel cubi parallelarum ut cubi abscissarum, figura erit triangulum, cujus proprietas notissima est, non parallelas modò & abscissas esse geometricè proportionales, sed parallelarum & abscissarum earundem potestates omnes homogeneas; quarum ratio æquè multiplex est rationis linearum seu radicum; ita ut cubi, & quadrato quadrata, &c. abscissarum sint ut cubi, quadrato quadrata, &c. parallelarum; & illorum quoque radices geometricè proportionales.

Sin autem diversorum graduum fuerint dignitates parallelarum & abscissarum, linea descripta erit curva, habens suum axem, & ad illum ordinatim applicatas, quarum dignitas est gradu superior dignitate abscissarum: at contra dignitas applicatarum ordinatim ad rectam [quæ curvam in vertice contingit] sumptam pro axe, gradu inferior est dignitate abscissarum tangentis. De quo alibi latius dicam. Esto

Est igitur $AGDB$ una ex præfatis figuris, ejusque axis AB , & vertex A ; in qua quidem gradus dignitatis parallelarum sit altior gradu dignitatis abscissarum; quærat autem linea recta contingens figuram in puncto dato C . Ducatur ex hoc puncto linea ad axem ordinatim applicata, ut CD , & ponantur exponentes dignitatum, 3 , & 2 . Erunt consequenter in figura parallelarum cubi ut quadrata abscissarum. Fiat abscissa AD , inter verticem & ordinatim applicatam, ad AF , axem productum, ut minor numerus 2 ad 1 , differentiam exponentium, ductaque FC ; Dico hanc esse tangentem quæsitam.

Productum enim FA_1 in AD_2 in linea DF , factum secundum terminos positos 1 & 2 , est maximum, per Theorema tertium; semperque homogeneum dignitati parallelarum; (cum parallelarum dignitatem exponat major datorum numerorum, maximum vero productum illud oriatur ex dignitatibus quas exponunt minor numerus & differentia numerorum, quæ duo simul efficiunt numerum majorem.) Ergo si accipiamus alium punctum G in axe supra D , aut infra, & ducamus ordinatim applicatam GH , quæ secet E rectam FC ubi opus fuerit productam, productum FA_1 in AG_2 non erit maximum in linea FG , quale est FA_1 in AD_2 in recta FD ; propterea quod major est vel minor ratio ipsius FA ad AG quam ad AD , & consequenter FG , FD non sunt proportionaliter divisa. Ergo majorem rationem habet FA_1 in AD_2 ad FD_3 sibi homogeneum, quam FA_1 in AG_2 ad FG_3 , & permutando, majorem rationem habet FA_1 in AD_2 ad FA_1 in AG_2 , (vel ex Lemmate quarto, AD_2 ad AG_2) quam FD_3 ad FG_3 . Sed AD_2 ad AG_2 ponitur in figura; ut CD_3 ad HG_3 ; FD_3 ad FG_3 , ob similitudinem triangulorum, ut CD_3 ad EG_3 . Ergo majorem rationem habet CD_3 ad HG_3 ; quam CD_3 ad EG_3 ; & consequenter CD majorem rationem habet ad HG , quam ad EG , ac proinde HG recta est minor quam EG , & punctus E cadit extra datam curvam $AHCH$. Eodem pacto de singulis punctis ductæ lineæ FC demonstratur illos cadere semper extra curvam. Ergo FC est illius tangens. Quod, &c.

Hæ sunt parabolæ, ut vocant, infinitæ, quarum contingentes lineæ, quo modo ad datum punctum duci possint, ostendimus. Nunc eandem methodum in hyperbolis quoque libet experiri. Præmittimus autem hoc necessarium Lemma.

Lemma

Lemma Sextum.

Fig. X. **D**ato angulo ABC utcumque secto per rectam BD , & puncto E in alterutro laterum comprehendentium angulum datum, ex eo puncto ducere lineam rectam quæ angulum ABC subtendat & à recta BD secetur in data ratione R ad S .

Fig. XI. Fiat HGF segmentum circuli capiens angulum æqualem dato, & compleatur circulus; deinde ut R ad S , ita fiat FL ad LH ; ut angulus ABD ad EBD , sic arcus FI ad IH ; ductaque IL producaturs usque dum pertingat ad K in circumferentia circuli, & connectantur puncta F , K , H . Ad datum punctum E fiat angulus BEA æqualis KHL , & EA secet BD in M & BA in puncto A . Dico rectam EA esse quæsitam, quæ à BD in M dividitur in ratione data.

Siquidem anguli H & E : K & B sunt æquales, & hi secti proportionaliter [per trigessimam tertiam sexti Elementorum] à KLI , & BD . Ergo triangula FHK , ABE sunt æquiangula, & AE ad EB , ut HF ad HK . Rursus æquiangula fecimus triangula MBE , LKH , & consequenter EB est ad EM , ut HK ad HL , & ex æqualitate ordinata AE ad EM , ut HF ad HL , & dividendo FL ad LH [seu R ad S] ut AM ad ME . Quod, &c.

Quod si punctus datus sit extra, ut in O , ducemus BO rectam [punctus autem O sic detur oportet, ut OB recta cum AB angulum faciat, nec sit ad lineam posita] & faciemus angulum BOL æqualem differentie angulorum, H , & EO ; & OL producta satisfaciet quæsito.

Fig. XII. Sit hyperbole ACL , cujus diameter AB , vertex A , & dignitates ordinatim applicatarum habentes eam proportionem quam producta illis dignitatibus homogenea, orta ex dignitate abscissæ ducta in dignitatem, abscissæ & diametri, ex quibus una recta conflata intelligatur. Exempli gratiâ, quadrato cubi ordinarum, hoc est LI 5 ad CD 5, sint, ut producta BI 3 in AI 2 ad BD 3 in AD 2, genita ex quadratis abscissarum AI , AD , & cubis rectarum BI , BD , quippe quas efficiunt eadem abscissæ & diameter.

Detur punctus C , ad quem ducenda sit tangens, & ordinatim applicetur CD . Porro ducatur BC , producta ad partes C , quoad oportuerit, & ex Lemmate præcedenti, AE [secans CD in F , & in F item secta pro ratione 2 ad 3, qui numeri exponunt dignitates gignentes producta

producta BI_3 in AI_2 , & BD_3 in AD_2 , subtendens angulum ECA]
& tandem GC parallela rectæ AE , occurrens ipsi AB in G . Dico tan-
gentem quæsitam esse CG .

Sumatur in CG alius punctus K supra & infra C , & , ordinatim ap-
plicatis KI secantibus hyperbolen in L , ab I puncto ducatur IC incidens
in rectam HB in puncto M , & secans AE in N ; quæ HB ipsi AE pa-
rallela in H occurrit DC productæ.

Quoniam verò AE secatur in F in ratione 2 ad 3, FA_2 in FE_3 ,
per tertium Theorema, est productum maximum, & ratio FE_3 ad
 NE_3 , seu HB_3 ad MB_3 [propter similitudinem triangulorum HCB ,
 ECF : MBC , CEN] major est ratione NA_2 ad AF_2 .
Ergo per Lemma quintum majus est HB_3 in AF_2 ipso MB_3 in NA_2 ;
que duo producta si comparentur cum CG_5 , primum habebit majorem
rationem ad CG_5 , quàm secundum. Sed ratio primi, quod est HB_3
in AF_2 , ad CG_5 eadem est ac ratio BD_3 in AD_2 ad GD_5 [cum
 HBA ad CG sit ut BD ad GD , ob similitudinem triangulorum HBD ,
 CGD ; eandemque proportionem habeant earum linearum cubi: tum CG
2 ad AF_2 , ut GD_2 ad AD_2] ratio secundi, seu MB_3 in NA_2 ,
ad CG_5 est eadem ac ratio BI_3 in AI_2 ad IG_5 [quia similia sunt
triangula MBI , CGI ; & MB , CG , BI , IG rectæ earumque cubi
proportionales: rursus ut GI_2 ad IA_2 , sic CG_2 ad AN_2] Ergo
majorem rationem habet BD_3 in AD_2 ad GD_5 , quàm BI_3 in IA_2
ad GI_5 , & permutando, BD_3 in AD_2 ad BI_3 in AI_2 [seu ex
natura hyperboles, CD_5 ad LI_5] majorem rationem habet, quàm
 DG_5 ad GI_5 , seu [ob similitudinem triangulorum KGI , CGD]
 CD_5 ad IK_5 , & per decimam quinti Elem. dignitas, LI ; minor
est quàm KI_5 , & sua radix, LI recta, minor recta KI ; quare pun-
ctus K est extra curvam. Sic de ceteris punctis ostendetur cadere extra
curvam, atque adeo CG hyperbolen tangere in solo C puncto. Quod
& c.

Hæc porro demonstratio etiam ad ellipses, & circulos accommodari
potest.

Jam verò quàm latè pateat usus nostri Theorematis tertii, ex propo-
sitis exemplis licet intelligere; nec ita multum dissimili aut difficiliore via
centra gravitatis, & qua draturas, quorum problematum paulò ante me-
minimus, invenimus. Interim, si quis Apollonii constructionem atque
demonstrationem trigesimæ quartæ propositionis primi Conicorum libri
cum nostris comparabit, nonnihil fortasse proficiet in arte dilatandi propo-
sitiones

13
fitiones & demonstrationes. Nam id quod ille de quadratica tantum
hyperbole, ellipsi, & circulo statuit, nos ad omnes porrigimus hyper-
bolas, ellipses, circulosque infinitos. Quam viam placuit indicare, &
supradicto exemplo confirmare.

L A U S . D E O .

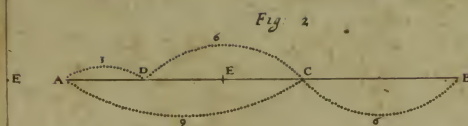


Fig. 4.

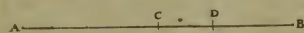


Fig. 7.

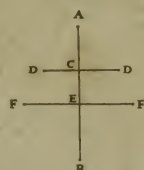


Fig. 6.

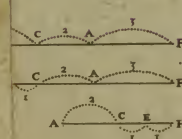


Fig. 9.

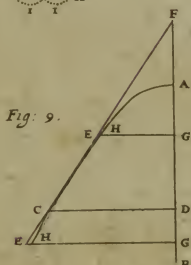


Fig. 11.

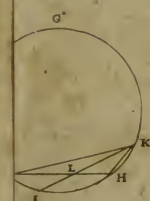
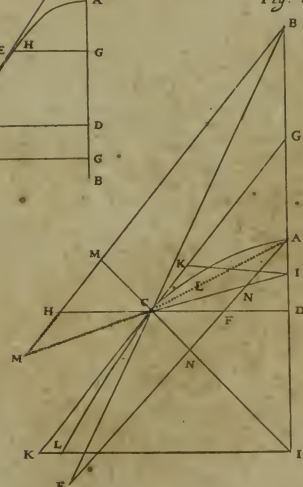
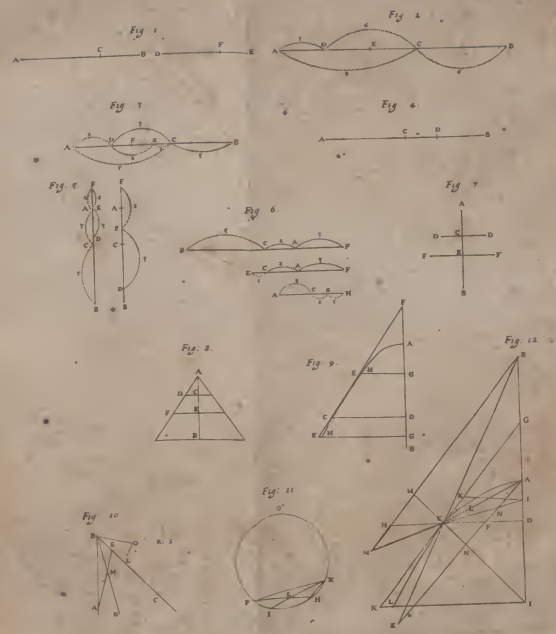
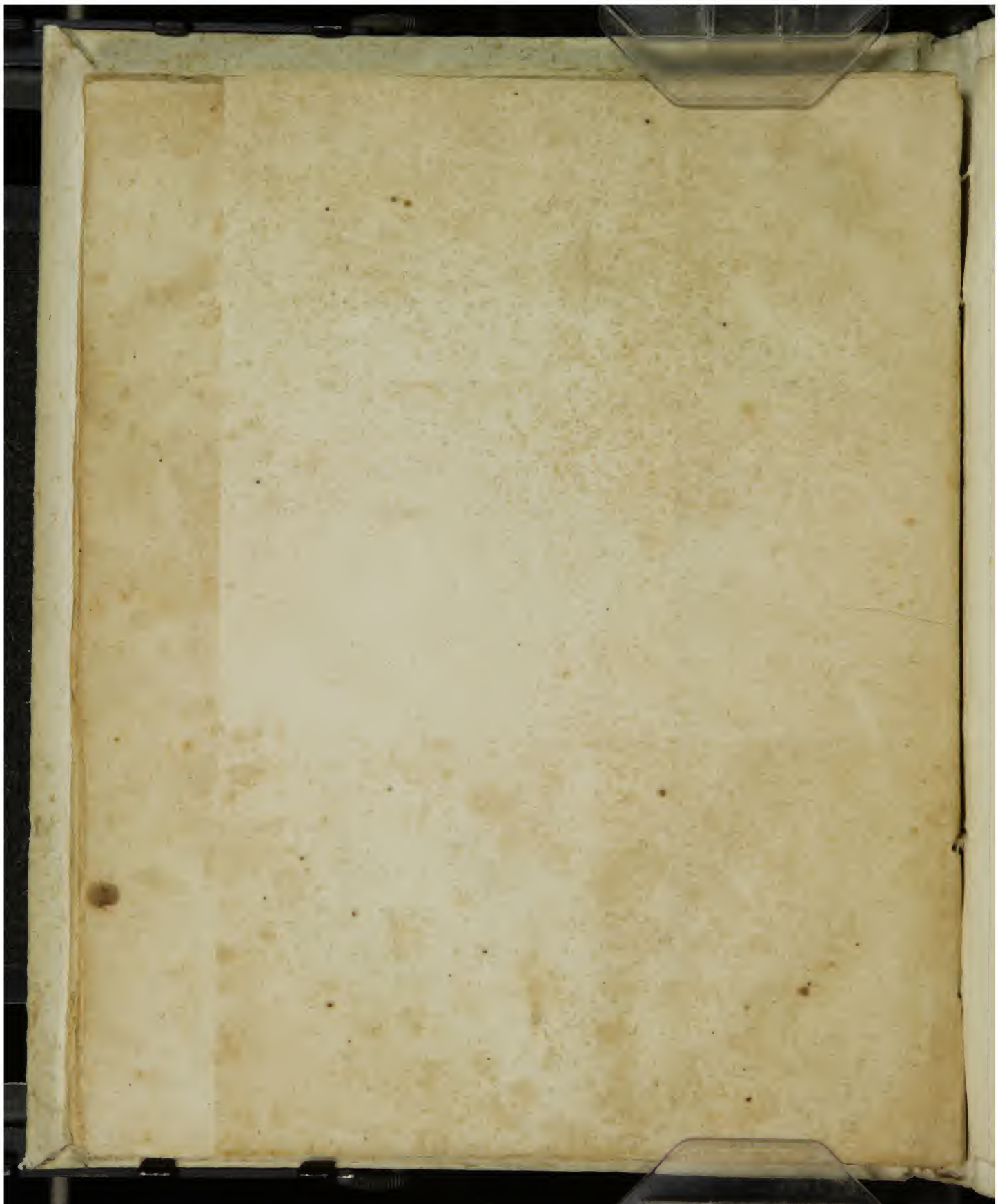


Fig. 12.









005643896